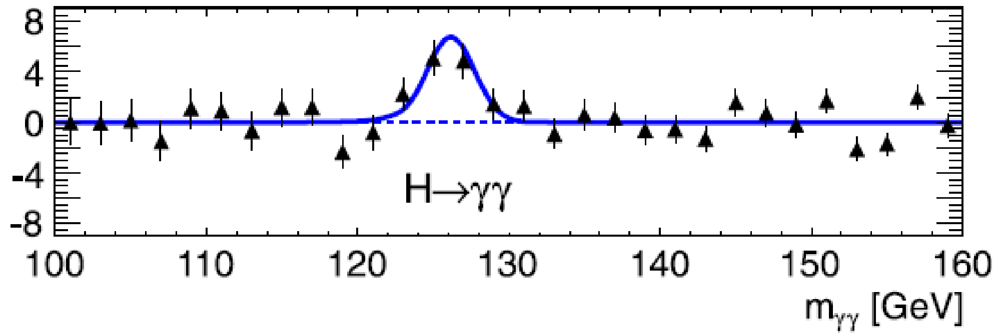
MY512
Mühendislikte İstatistik Yöntemler

Bölüm 11

Ölçme ve Belirsizlik



http://www1.gantep.edu.tr/~bingul/stat

Gaziantep Üniversitesi

Yönetim Bilişim Sistemleri

Tezsiz Yüksek Lisans Programı

Ocak 2021

Ölçme ve Belirsizlik
(Measurement and Uncertainty)

Deney

Fen ve Mühendislikte deneyler genellikle

- bir kuramı test etmek için veya
- başka deneylerin sonuçları ile karşılaştırmak için

yapılır.

- Deney yapılınca ölçümlerle birlikte ölçüm hatalarını da dikkate almak önemlidir. Örneğin yerçekimi değeri:

$$g = \underbrace{9.77}_{\text{Ölçülen değer}} \pm \underbrace{0.14}_{\text{Ölçme hatası}} \ \mathrm{m/s^2}$$

Her ölçüme eşlik eden bir hata vardır.

Hata Birikimi (=Error Propagation)

İki belirsiz ölçüm sonucun toplamı, çarpımı vb, işlemler den sonuca nasıl yansır?

İstatistiksel veri analizinde, hata birikimi ölçüm belirsizliklerinin sonuç fonksiyonuna olan etkisi ile ilgilidir.

Örneğin

$$x = 10.1 \pm 0.4$$
$$y = 9.8 \pm 0.6$$

için x – y ve ona eşlik eden hata nedir?

(cevap: x – y = 0.3 ve hatası 0.7)

<u>Tek değişkenli fonksiyonlar için</u>, f(x), eğer x'in ölçme belirsizliği (ölçme hatası) σ_x ise, eşlik eden hata σ_f

$$\sigma_f = \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$

formülü ile bulunur.

Örnekler:

$$\sigma(x^2) = 2x\sigma_x \qquad \text{or} \qquad \frac{\sigma(x^2)}{x^2} = 2\frac{\sigma_x}{x}$$

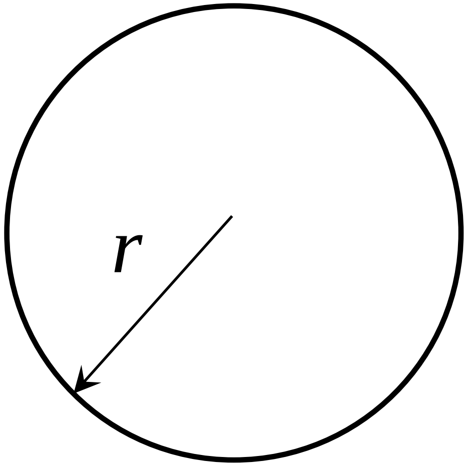
$$\sigma(x^n) = nx^{n-1}\sigma_x \qquad \text{or} \qquad \frac{\sigma(x^n)}{x^n} = n\frac{\sigma_x}{x}$$

$$\sigma(\sin x) = \cos x\, \sigma_x$$

$$\sigma(\ln x) = \frac{1}{x}\sigma_x$$

Örnek 1

Bir dairenin yarıçapı aşağıdaki gibi ölçülmüştür.



$$r = 2.5 \pm 0.3\,\mathrm{cm}$$

Dairenin alanını ve alanın belirsizliğini bulun.

Alan: $A = \pi r^2 = \pi (2.5)^2 = 19.6\,\mathrm{cm}^2$

Alandaki belirsizlik:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r = 2\pi(2.5) = 15.7$$

$$\sigma_A = \frac{dA}{dr}\sigma_r = (15.7)(0.3) = 4.7\,\mathrm{cm}^2$$

Yani : $\boxed{A = 19.6 \pm 4.7\,\mathrm{cm}^2}$

Genel olarak birbirinden bağımsız *n* tane değişkene

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

eşlik eden hatalar

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

olsun. Buna göre

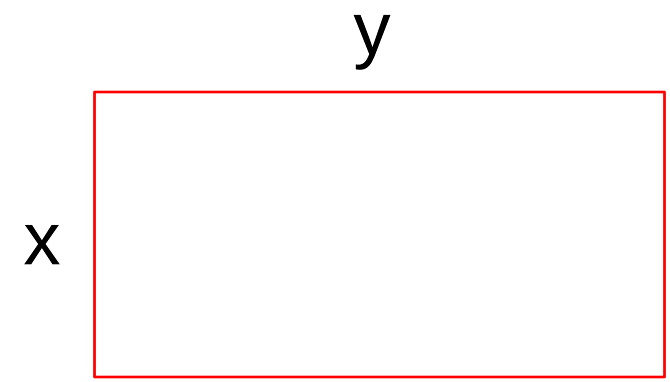
$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

fonksiyonuna eşlik eden hata aşağıdaki formülle bulunur:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2$$

Örnek 2

Yandaki dikdörtgenin alanı nedir?



Eğer:

$$x = 1.0 \pm 0.1\,\mathrm{m}$$

$$y = 2.0 \pm 0.2\,\mathrm{m}$$

Alan: $$A = xy = (1)(2) = 2.00\,\mathrm{m}^2$$

$$\frac{dA}{dx} = y = 2 \qquad \frac{dA}{dy} = x = 1$$

Alandaki hata:

$$\sigma_A = \sqrt{(\frac{dA}{dx}\sigma_x)^2 + (\frac{dA}{dy}\sigma_y)^2} = \sqrt{[(2)(0.1)]^2 + [(1)(0.2)]^2} = 0.28\,\mathrm{cm}^2$$

Yani: $$\boxed{A = 2.00 \pm 0.28\,\mathrm{m}^2}$$

İki değişkenli basit fonksiyonlarda belirsizlik formülleri

Function	Derivative(s)	Variance	Standard deviation
$f = kx$; $k \varepsilon \mathrm{R}$	$\frac{\partial f}{\partial x} = k$	$\sigma_f^2 = k^2 \sigma_x^2$	$\sigma_f = k\sigma_x$
$f = x + y$	$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$	$\sigma_f^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$	$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$f = x - y$	$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$	$\sigma_f^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$	$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
$f = x\,y$	$\frac{\partial f}{\partial x} = y$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = x$	$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$	$\sigma_f = f\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$f = x\,/\,y$	$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$	$\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$	$\sigma_f = f\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$

Bağımsız Ölçümlerin Birleştirilmesi

n tane bağımsız deney sonucu x_i (i = 1, … ,n)

ve hatası σ_i ile gösterilsin. Bu deneyler sonuçları birleştirip daha hassas bir deney sonucu bulmak mümkündür.

Bunun için ağırlıklı ortalamaları kullanmak uygundur. İstatistiksel olarak doğru hesaplama:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2} \qquad \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2}}$$

Örnek 3

Yerçekimi ölçümü için üç farklı deney sonucu aşağıdaki gibidir:

$$9.77 \pm 0.14\,, \quad 9.82 \pm 0.10\,, \quad 9.86 \pm 0.20\ \mathrm{m/s}^2$$

g değerinin birleştirilmiş değeri ve hatası nedir?

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2} = \frac{9.77/0.14^2 + 9.82/0.10^2 + 9.86/0.20^2}{1/0.14^2 + 1/0.10^2 + 1/0.20^2} = 9.811\ \mathrm{m/s}^2$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1/\sigma_i^2}} == \frac{1}{\sqrt{1/0.14^2 + 1/0.10^2 + 1/0.20^2}} = 0.075\ \mathrm{m/s}^2$$

Yani: $\boxed{g = 9.811 \pm 0.075\ \ \mathrm{m/s}^2}$

Gözlem ve Kuramın Karşılaştırılması

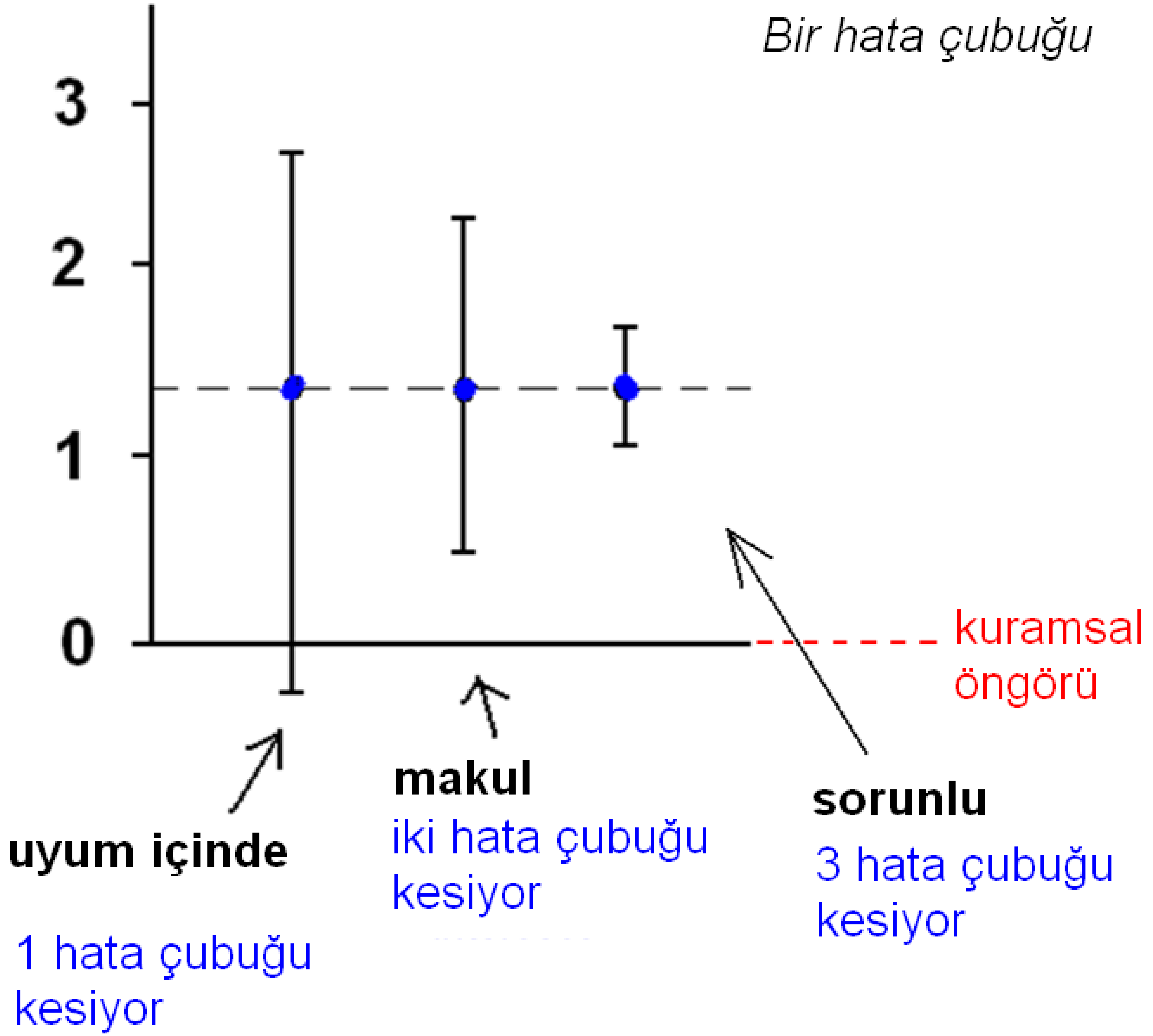
Ölçüm sonuçları kuramsal beklenen değerler ile karşılaştırıp, kuramlar test edilir. Fakat bu karşılaştırma için, deneysel ve kuramlar arasındaki farkların ölçüm belirsizliğinden ne kadar uzakta olduğu çok önemlidir..

Örneğin kuramın öngördüğü değer 0.0 (sıfır) olsun.

* Eğer ölçüm sonucu 1.3 ± 1.4 ise
  ölçüm ve kuram uyum içindedir. Çünkü **1.3/1.4 = 0.93 < 1**

* Eğer ölçüm sonucu 1.3 ± 0.8 ise
  sonuç hala makuldür. Çünkü **1.3/0.8 = 1.63 < 2**

* Eğer ölçüm sonucu 1.3 ± 0.3 ise
  bu bir problemin işaretidir. Çünkü **1.3/0.3 = 4.33 > 3**


Bir hata çubuğu
3
2
1
0
kuramsal
öngörü
uyum içinde
1 hata çubuğu
kesiyor
makul
iki hata çubuğu
kesiyor
sorunlu
3 hata çubuğu
kesiyor

Örnek 4

Bir siyasi partinin gelecek yıl yapılacak seçimlerdeki başarısını belirlemek için iki farklı anket yapılmıştır. Sonuçlar şöyle:

$$x = \%35.7 \pm 0.4\,, \quad y = \%34.6 \pm 0.6$$

Bu sonuçlar birbirinden farklı mıdır (kaç sigma farklıdır)?

Farka F diyelim:

$$F = |x - y| = |35.7 - 34.6| = 1.1$$

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.6^2} = 0.7$$

$$\frac{F}{\sigma_F} = \frac{1.1}{0.7} = 1.6$$

Bu iki sonuç makuldür (çok farklı değildir) çünkü fark ***1.6 sigma < 2****.*

Fark ***3+*** *sigma olsaydı, anketlerin güvenirliği tartışılırdı.*

Örnek 5

Bir bilgisayar programı iki farklı bilgisayarda 30'ar kez koşturuluyor ve çalışma süreleri yandaki gibidir. Sürelerin oranını ve bu orana eşlik eden belirsizliği %95 güvenlik düzeyinde hesaplayınız.

A	B
964	630
954	640
955	645
956	650
945	654
967	641
962	627
956	633
967	630
951	661
959	634
959	647
962	638
962	648
956	633
960	627
959	627
963	644
965	638
966	638
956	653
960	643
954	642
954	654
960	633
968	646
956	648
962	638
959	642
966	630

Ortalama : $\bar{x}_A = 959.4\,\mathrm{s}$ $\quad\bar{x}_B = 640.5\,\mathrm{s}$

Std. Sapma: $s_A = 5.3\,\mathrm{s}$ $\quad s_B = 9.0\,\mathrm{s}$

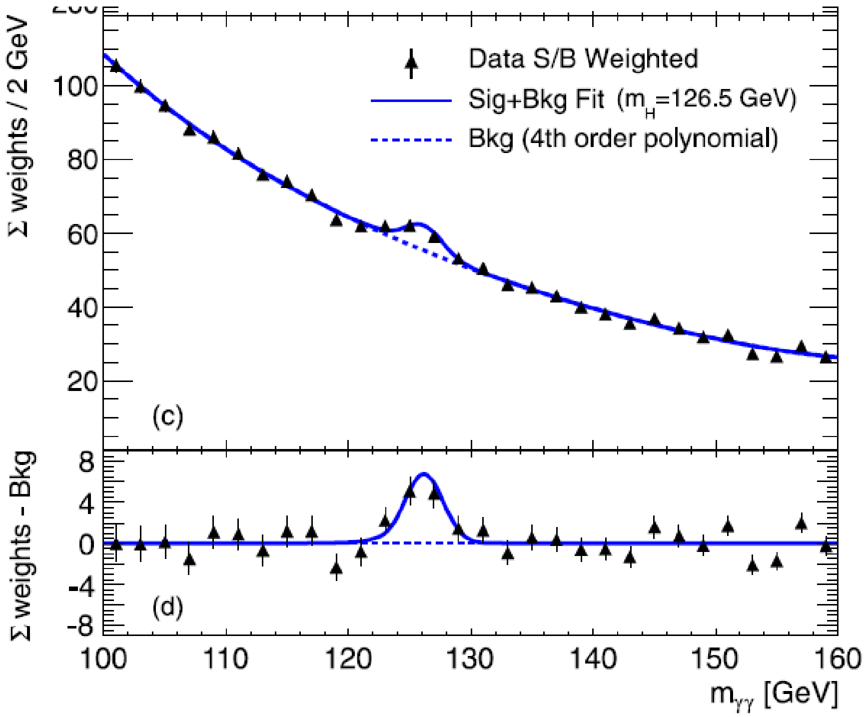
Std. Hata : $s_{\bar{x}A} = \sigma_A = \dfrac{5.3}{\sqrt{30}} = 1.0\,\mathrm{s}$ $\quad s_{\bar{x}B} = \sigma_B = \dfrac{9.0}{\sqrt{30}} = 1.6\,\mathrm{s}$

Oran: $$R = \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B} = \frac{959.4}{640.5} = 1.4979$$

Belirsizlik: $$\sigma_R = R\sqrt{\sigma_A^2/\bar{x}_A^2 + \sigma_B^2/\bar{x}_B^2} = 0.0041$$

SONUÇ: $$R = 1.4979 \pm 0.0041\,\mathrm{s}\ \ (\%68\,\mathrm{G.D.})$$
$$R = 1.4979 \pm 0.0080\,\mathrm{s}\ \ (\%95\,\mathrm{G.D.})$$

CERN'de, Higgs Bozonu'nun Keşfi (2012)



5 sigma fark!