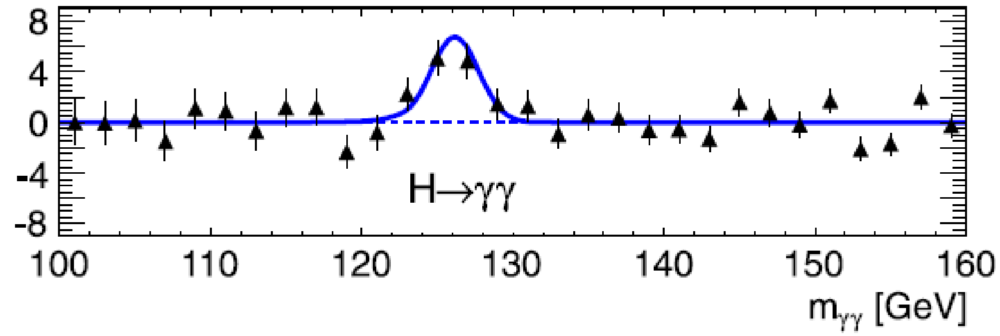
YBS514
Mühendislikte İstatistik Yöntemler

Bölüm 4

Olasılık



http://www1.gantep.edu.tr/~bingul/stat

Gaziantep Üniversitesi

Yönetim Bilişim Sistemleri

Tezsiz Yüksek Lisans Programı

Ekim 2020

İçerik

- Giriş
- Küme kavramı
- Temel olasılık kuramı
- Rassal Değişkenler

Giriş

- Olasılık bir olayın meydana gelme şansını ölçmeye yarar.
- Günlük hayatımızda sıkça kullandığımız ve yararlandığımız bir kavram: tahmin. Neden tahminler yapıyoruz?
  - Meteoroloji (%80 yağmur var!)
  - Cimbom'un Fener'i Kadıköy'de yenme şansı (Geçmiş maçlara bak)
  - Sınav notu (Öğrencinin geçmiş sınavlarına bak notu tahmin et)
  - Bir firmanın gelecek yıl satış tahminleri olasılığa bağlıdır.
  - Üretilen bir malın bozuk olma ihtimali nedir? (100 numune al kaçı bozuk bak)
  - Birim alana birim zamanda düşecek ortalama kozmik radyasyon miktarı (Hava basınca bağlı veri topla, tahmin yürüt)

- Olasılık istatistikte öngörü (çıkarsama) temelini oluşturur.
- Olasılık istatistikte planlama yapmayı sağlar.
  Belirsizlik durumunda veya mevcut bilgilerin tam ve sağlıklı olmaması durumunda, doğru kararlar vermeye yardımcıdır.

Küme Kavramı
(kısa bir hatırlatma)

Küme Kuramı (Set Theory)

İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir.

Küme:

P = {Bir basketbol takımındaki boyu 2 m'den fazla olan oyuncular}

Bulanık Küme:

Q = {Bir basketbol takımındaki boyu 2 m'ye yakın olan oyuncular}

Diğer örnekler:

A = {1,2,3,4}	=> sonlu küme
M = {elma, muz, portakal}	=> sonlu küme
R = {x | x yeryüzündeki bir nehir}	=> sonlu küme
N = {0,1, 2, 3, 4, ...}	=> sonsuz küme
P = {2, 4, 8, ...}	=> sonsuz küme
K = {x | 2<x<5, x gerçel sayı}	=> sonsuz küme

Gösterim:

$p \in A$ — *p, A'nın elemanıdır*

$A \subset B$ — *A, B'nin alt kümesidir*

U — *Evrensel küme*

ϕ — *Boş küme*

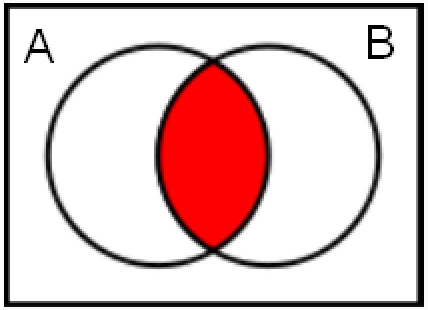
Herhangi bir A kümesi için

$$\phi \subset A \subset U$$

Küme işlemleri:

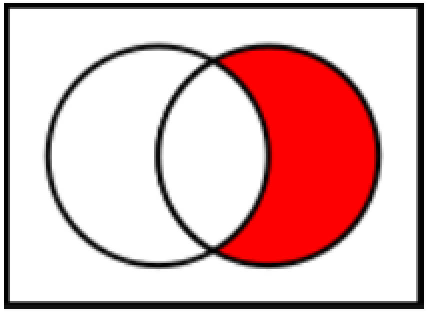
Venn Diagram

Kesişim $A \cap B$



Birleşim $A \cup B$

Fark $B - A$



Tümleyen (Complement) A^C

Örnek 1

Aşağıdaki kümeler verilsin:

A ={1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5, 6} ve U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8 …}

Buna göre

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A n B = {3, 4}

A \ B = A – B = {1, 2}

A^c = {5, 6, 7, 8, ...}

Örneklem Uzayı (Sample Space)

Bir deneyde bütün olası çıktıların oluşturduğu kümeye (S) örneklem uzayı denir.

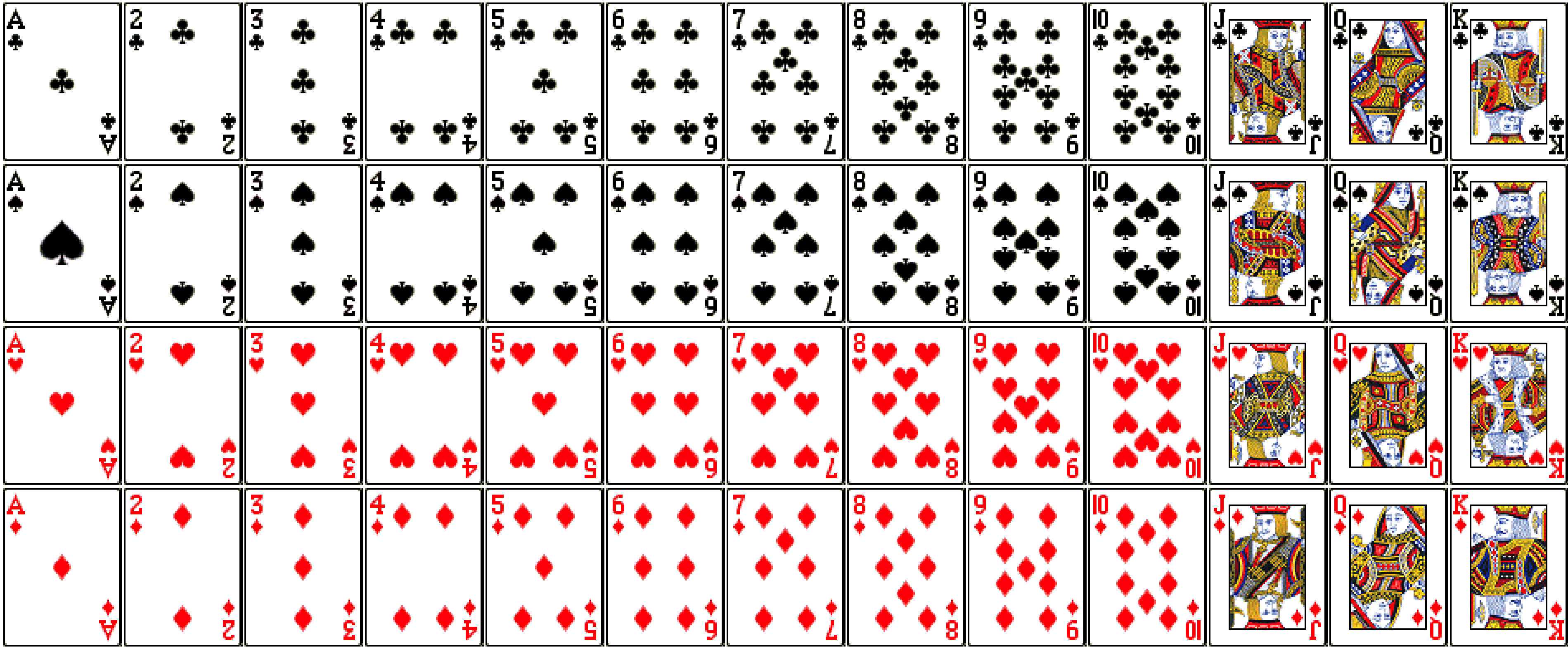
Deney	Örneklem uzayı
Bir paranın atılması	S = {Y, T}
İki paranın atılması	S = {YY, YT, TY, TT}
Doğacak bebeğin cinsiyeti	S = {E, K}
Öğrencinin başarı sonucu	S = {Başarılı, Başarısız}

Deney	Örneklem uzayı
Bir zarın atılması	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
İki zarın atılması	S = {11,12,13,14,15,16, 21,22,23,24,25,26, 31,32,33,34,35,36, 41,42,43,44,45,46, 51,52,53,54,55,56, 61,62,63,64,65,66}

Deney: Rastgele karılmış bir iskambil destesinden seçilecek bir oyun kartı:

Örneklem uzayı:

S = {



}

Örnek 2

MARMARALI kelimesinden rastgele seçilecek bir harften oluşturulacak örneklem uzayı nedir?

$$X = \{M, A, R, L, I\}$$

Temel Olasılık

Olasılık (Probability)

Tarihsel olarak, olasılık kuramı rulet, iskambil kartı gibi şans oyunları üzerinde yapılan çalışmalarla başlamıştır.

Kesincilik (Determinizm)

Eğer bir para havaya belii bir hızda ve açıyla atılsa, yere düştüğünde nereye, hangi hızla, ne zaman vuracak bilinebilir.

Belirsizlik (Uncertainity, non-deterministic, random)

Fakat, başlangıç şartları ne kadar iyi bilinirse bilinsin, yere vuran paranın durduktan sonra hangi yüzünün yukarıda kalacağı kesin değildir. (Sonuç Yazı mı Tura mı belirsizdir)

Olasılık rastgele deneylerin sonuçları ile ilgilenir.

Olasılık için Üç Kavramsal Yaklaşım

1) Göreli sıklık (yaklaşık çözüm)

Sonuçlar tekrarlı deneyler yapılarak bulunur.

2) Klasik olasılık

Sonuçlar belli sayıdaki eşit olasılıklı durum sayısı ve gerçekleşen olaylardan hesaplanır.

3) Öznel olasılık

Ne eşit olasılık ne de tekrarlanabilir deney söz konusu ise farklı yaklaşımlar kullanılır. Ölçmesi zordur.

Örneğin:

* *Ahmet'in Kimya dersinden AA alma olasılığı nedir?*

* *Bulunduğunuz odada hayalet bulunma olasılığı nedir?*

Göreli Sıklık (Relative Frequency)

Bir paranın Yazı-Tura frekanslarını inceleyelim.

Bir paranın tekrar tekrar atıldığı bir deney düşünün.

s = Turaların gelme sayısı olsun

n = Deney sayısı olsun

Deney çok kez tekrarlandığında, s / n oranı kararlı olarak belli bir sayıya yaklaşır.

$$f = \frac{s}{n}$$

f , n -> ∞ limitinde belli bir değere yakınsar.

Bu kararlılık olasılık kuramının temelini oluşturur.

Örnek3: Gerçek deney sonucu

Gaziantep'te bir öğrencimiz 10 parayı 100 kez atıp çıkan sonuçları kaydetti.

[Web sayfasındaki Excel belgesine (para_zar.xls) bkz]

* Bu deneyin ilk 25 gözlem sonucu yandadır.
* Her gözlem 10, toplamda 250 deney vardır.
* Göreli sıklık yaklaşımına göre

  Yazı olasılığı: P(Y) = 128/250 = 0.512

  Tura olasılığı: P(T) = 122/250 = 0.488

olacaktır.

Deneyin tamamı:

toplam 100 gözlem = 1000 deney sonucuna göre:

P(Y) = 496 / 1000 = 0.496

P(T) = 504 / 1000 = 0.504

Sonuç: gözlem sayısı (n) arttıkça:

P(Y) = P(T) = 0.5 değerine yaklaşmaktadır.

Gözlem#	YAZI	TURA
1	7	3
2	7	3
3	6	4
4	4	6
5	3	7
6	5	5
7	6	4
8	4	6
9	4	6
10	6	4
11	4	6
12	6	4
13	2	8
14	6	4
15	6	4
16	5	5
17	7	3
18	4	6
19	6	4
20	5	5
21	4	6
22	7	3
23	6	4
24	5	5
25	3	7
Toplam	**128**	**122**
Oran	**0.512**	**0.488**

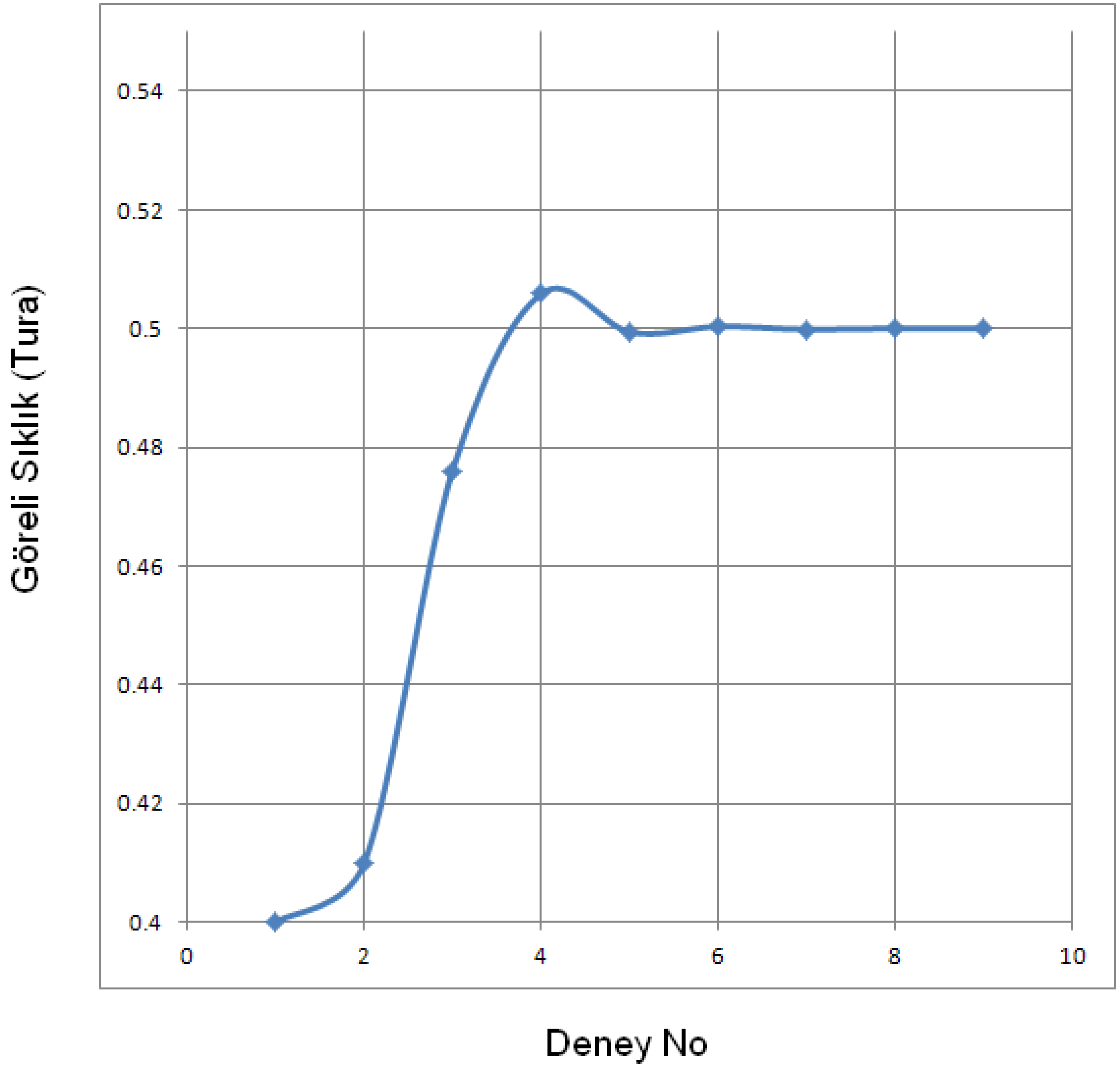
Örnek3: Yazı-Tura Benzetimi (simulation)

Burada **tura**ların sıklığını hesaplayan bir Bilgisayar Benzetiminin sonuçları verilmiştir.

n	s	f = s/n
10	4	0.4000000
100	41	0.4100000
1,000	476	0.4760000
10,000	5059	0.5059000
100,000	49942	0.4994200
1,000,000	500351	0.5003510
10,000,000	4998906	0.4998906
100,000,000	50006417	0.5000641
1,000,000,000	500000839	0.5000084

Sonuç $n \to \infty$ giderken bu belli bir değere yaklaşmaktadır

Örnek3: Yazı-Tura Benzetimi (simulation)



Örnek4: Gerçek deney sonucu

Gaziantep'te bir öğrencimiz 1 zarı 1000 kez atıp çıkan sonuçları kaydetti.

(Web sayfasındaki Excel belgesine (para_zar.xls) bkz)

* Bu deneyin ilk 36 gözlem sonucu yandadır.

* Göreli sıklık yaklaşımına göre

Zarın 1 gelme olasılığı: P(1) = 4/36 = 0.111

Zarın 2 gelme olasılığı: P(2) = 5/36 = 0.139

olacaktır.

Deneyin tamamı 1000 deney sonucu yandaki tabloda verilmiştir.

P(1) = 171 / 1000 = 0.171

P(2) = 178 / 1000 = 0.178

Sonuç: gözlem sayısı (n) arttıkça:

P(1) = P(2) = ... = P(6) = 1/6 = 0.166666

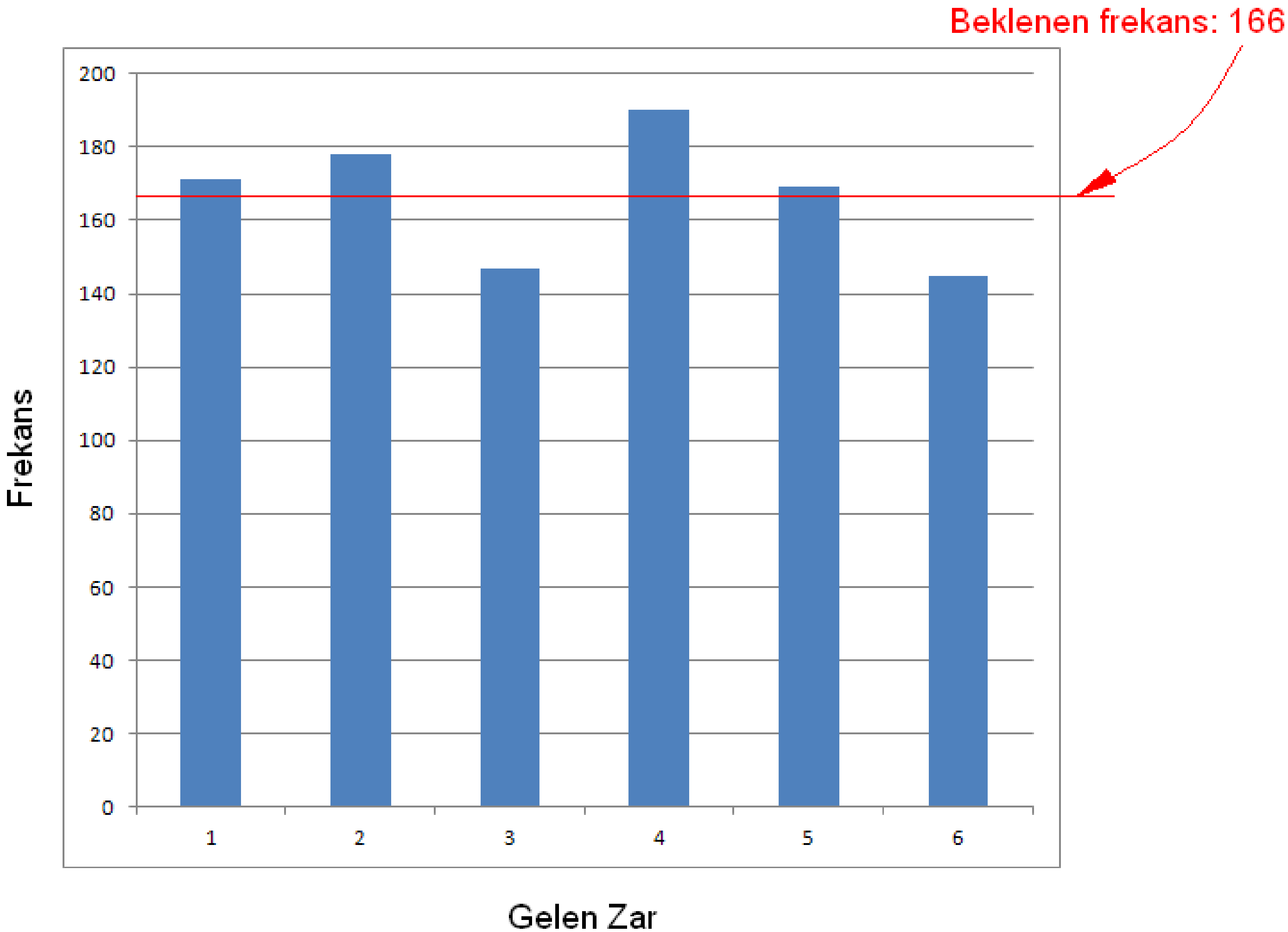
değerine yaklaşması beklenir.

Zar çıktısı	s	f = s/n
1	4	0.111
2	5	0.139
3	6	0.167
4	7	0.194
5	6	0.167
6	8	0.222
Toplam	**36**	**1.000**

Zar çıktısı	s	f = s/n
1	171	0.171
2	178	0.178
3	147	0.147
4	190	0.190
5	169	0.169
6	145	0.145
Toplam	**1000**	**1.000**

Örnek4: Gerçek deney sonucu

Zar çıktısı	s	f = s/n
1	171	0.171
2	178	0.178
3	147	0.147
4	190	0.190
5	169	0.169
6	145	0.145
Toplam	**1000**	**1.000**



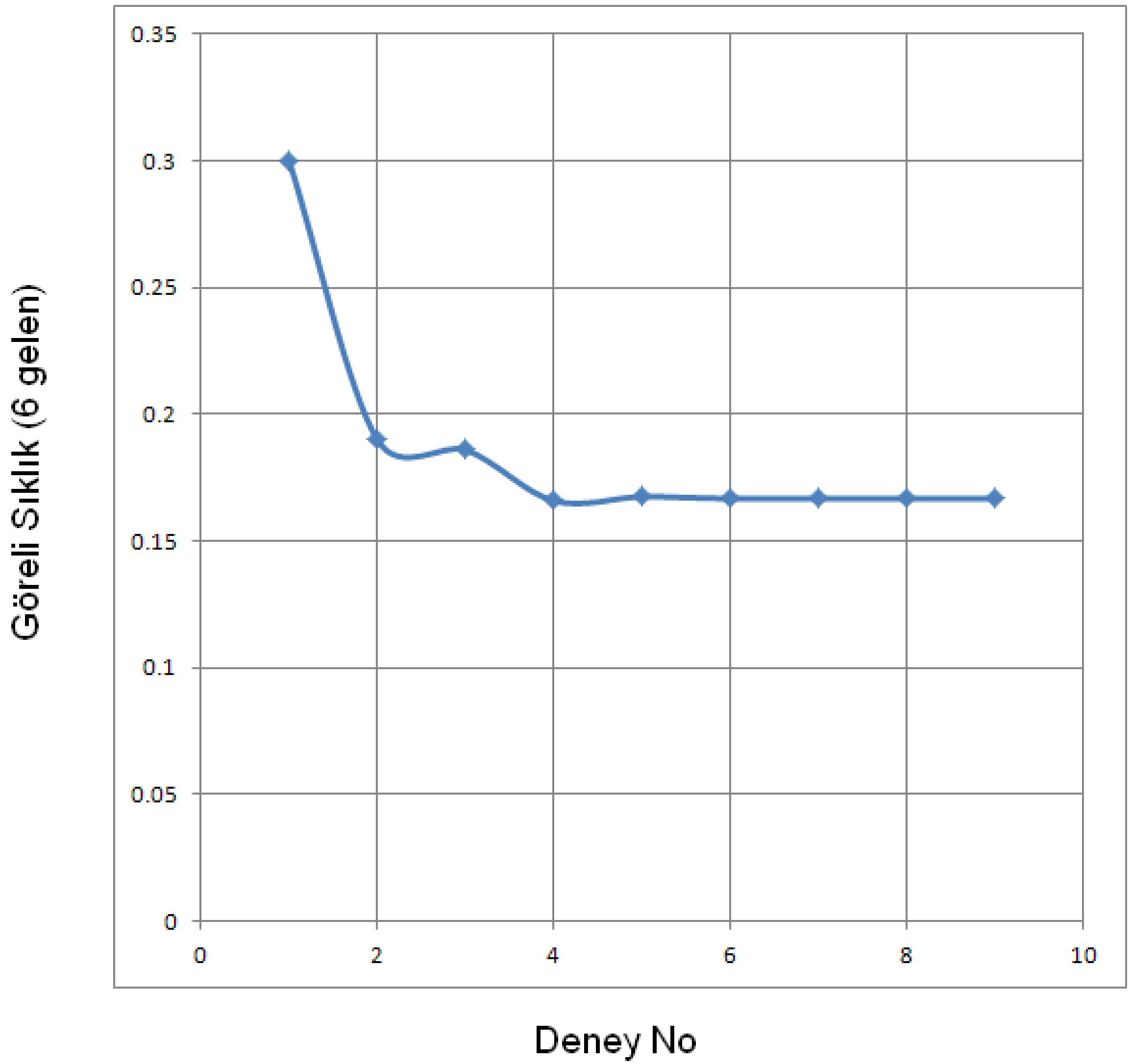
Örnek5: Zar Benzetimi (simulation)

Burada bir zarın 6 gelme sıklığını hesaplayan bir Bilgisayar Benzetiminin sonuçları verilmiştir.

n	s	f = s/n
10	3	0.3000000
100	19	0.1900000
1,000	186	0.1860000
10,000	1659	0.1659000
100,000	16748	0.1674800
1,000,000	166705	0.1667050
10,000,000	1667210	0.1667210
100,000,000	16666290	0.1666629
1,000,000,000	166666653	0.1666666

Sonuç n -> ∞ giderken bu belli bir değere yaklaşmaktadır

Örnek5: Zar Benzetimi (simulation)



Örnek6:

Bir otomobil fabrikasında üretilen otomobillerden rastgele 500 tane seçilmiş ve 10 tanesinin kusurlu olduğu anlaşılmıştır. Buna göre sonraki ilk üretilecek otomobilin kusurlu olma olasılığı yaklaşık olarak nedir?

-

Otomobil	s	f=s/n
Kusurlu	10	10/500 = 0.02
Kusursuz	490	490/500 = 0.98
Toplam	500	500/500 = 1.00

Buna göre

P(ilk oto kusurlu) = 0.02 = %2

P(ilk oto kusursuz) = 0.98 = %98

Örnek7:

Bir firma piyasadaki bir ürünü hakkında tüketicisinin beğenisini araştırmak istemektedir. Bunun için bir soru 500 kişiye sorulmuş ve elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çok beğeniyorum	Beğeniyorum	Fikrim Yok	Beğenmiyorum	Hiç beğenmiyorum
80	200	60	120	40

Buna göre

P(beğeniyor) = 200 / 500 = 0.40 = %40

P(fikri yok) = 60 / 500 = 0.12 = %12

Klasik Olasılık Kuramı

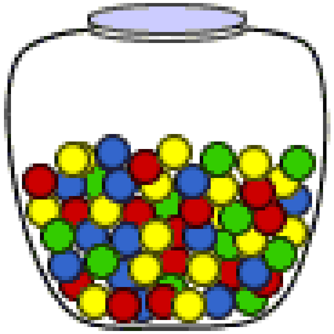
Bir *A* olayının gerçekleşme olasılığı (*p*) şöyle tanımlanır.

$$p = P(A) = \frac{\text{A olayını içeren sonuç sayısı}}{\text{Toplam deney sayısı}} = \frac{s}{n}$$

* Bir paranın atılsın: Tura olasılığı => p = 1/2
* Bir zar atılsın: Altı olasılığı => p = 1/6
* Bir zar atılsın: çift sayı olasılığı => p = 3/6

Olasılık bir olayın gerçekleşme ihtimalinin bir ölçüsüdür.

Örnek 8



Bir kavanozda 6 kırmızı, 5 yeşil, 8 mavi ve 3 sarı bilye vardır.

(a) Her bilyenin olasılıklarını hesaplayın.

```
p(kırmızı) = 6 / 22 = 0.27273
p(yeşil)   = 5 / 22 = 0.22727
p(mavi)    = 8 / 22 = 0.36364
p(sarı)    = 3 / 22 = 0.13636
```

(b) İki bilye çekiliyor. Birincinin sarı, ikincinin kırmızı olma olasılığı nedir?

```
Önce : p(sarı)     = 3 / 22
Sonra: p(kırmızı) = 6 / 21 (neden?)
       p(sarı & kırmızı)= (3/22)*(6/21) = 18/462 = 0.038961
                                              ~ 4%
```

Örnek 9

(a) MARMARALI kelimesinden rastgele seçilecek bir harften oluşturulacak örneklem uzayı nedir?

X = {M, A, R, L, I}

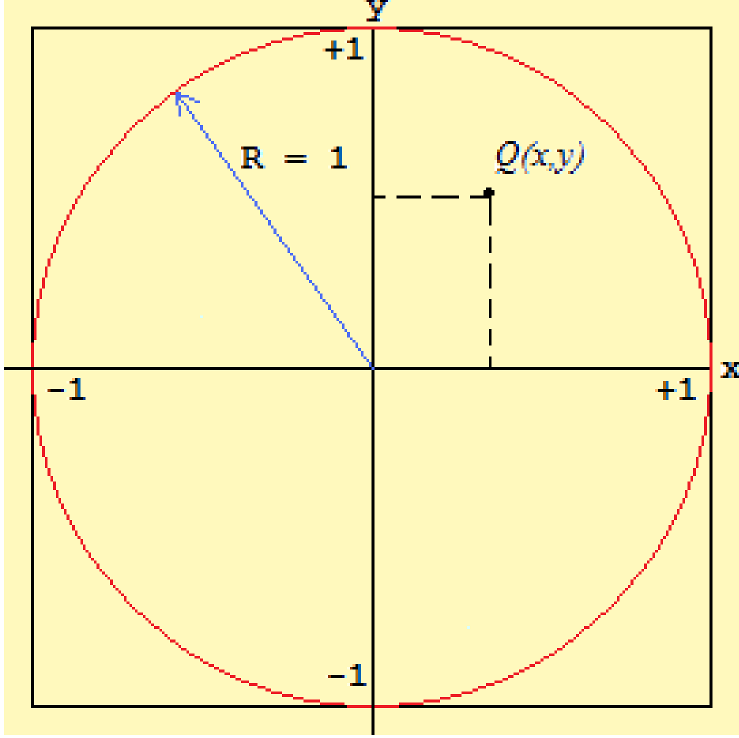
(b) Bu kümeden seçilecek bir harfin M olma olasılığı nedir?

X =	**{ M,**	**A,**	**R,**	**L,**	**I}**	**(küme)**
F =	**{ 2,**	**3,**	**2,**	**1,**	**1}**	**(frekans)**
f(X)=	**{2/9,**	**3/9,**	**2/9,**	**1/9,**	**1/9}**	**(olasılık)**

M olma olasılığı 2/9 = 0.222 yada %22.2 dir.

Örnek 10

Bir Q noktası şekildeki bir kenarı 2 cm olan bir karenin içinden rastgele seçiliyor. Karenin içine dört noktadan teğet olacak biçimde bir çember çiziliyor. Q noktasının çemberin içinde olma olasılığı nedir?



Şekilden çemberin yarıçapı *R* = 1 cm.

Q noktasının çemberin içinde kalma olasılığı:

$$P = \frac{\text{çemberin alanı}}{\text{karenin alanı}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

Olasılık Önkabülleri (Axioms of Probability)

S bir örneklem uzayı, *A* ve *B* iki olay olsun. Buna göre:

A1. $0 \leq P(A) \leq 1$

A2. $P(S) = 1$

A3. Eğer *A* ve *B* ayrık olaylar ise

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Olasılık Kuramları

T1. $P(\phi)=0$ (imkansız olayın olasılığı sıfırdır)

T2. A^c, *A*'nın tümleyeni ise: $P(A^c)=1-P(A)$

T3. Eğer *A* ve *B* herhangi iki olay ise:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

T4. Eğer *A*, *B* ve C herhangi üç olay ise:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)= \; & P(A)+P(B)+P(C)\\ & -P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)\\ & -P(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Sayma Kuralı

Eğer bir deneyde

ilk aşamada *m* tane,

ikinci aşamada *n* tane ve

üçüncü aşamada *k* tane sonuç varsa, bu deneyin

toplam sonuç sayısı = $m * n * k$ dır.

Örneğin: Bir para üç kez atılıyor.

Toplam durum sayısı nedir?

1. para: Y veya T 2 durum

2. para: Y veya T 2 durum

3. para: Y veya T 2 durum

Toplam durum (sonuç) sayısı = 2.2.2 = 8 tane

P(YYY) = 1 / 8 = 0.125

Durum	Gözlem
1	YYY
2	YYT
3	YTY
4	YTT
5	TYY
6	TYT
7	TTY
8	TTT

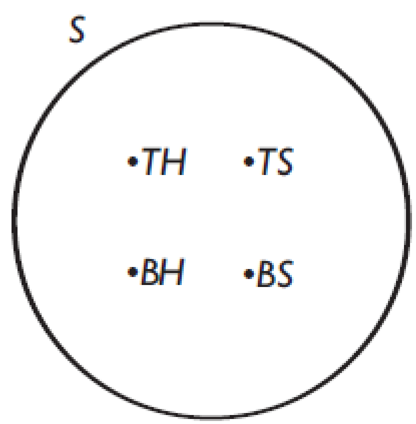
Örnek 11

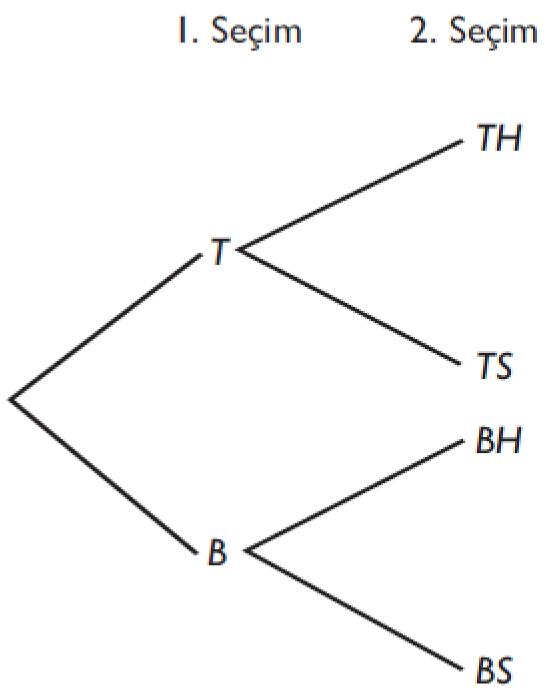
Bir öğrenci eğitim-öğretim yılının ilk döneminde Sanat Tarihi (T) yada Beden Eğitimi (B) derslerinden yalnızca birini, ikinci döneminde ise Halk dansları (H) ya da Salon Dansları (S) derslerinden yalnızca birini seçmeli ders olarak seçmek zorundadır. Bu durumda, Öğrenci kaç farklı ders seçimi yapabilir?

1.Durum sayısı: 2

2.Durum sayısı: 2

Toplam durum say. = 2.2 = 4





Koşullu Olasılık

Bir *B* olayının gerçekleşmesi durumunda, *A* olayının olasılığı, koşullu olasılık olarak ifade edilir ve $P\,(A|B)$ şeklinde gösterilir. $P(B)>0$ ise, koşullu olasılık aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Örnek 12

1’den 10’a kadar olan tam say›lar arasından rassal olarak seçilen bir sayının 3 ile bölündüğü bilindiğine göre bu sayının 2 ile bölünme olasılığı nedir?

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9, 10}

A = Rassal olarak seçilen bir sayının 2 ile bölünmesi = {2, 4, 6, 8, 10}

B = Rassal olarak seçilen bir sayının 3 ile bölünmesi = {3, 6, 9}

AnB = Rassal olarak seçilen bir sayının 2 ve 3 ile bölünmesi = {6}

P(A) = 5/10 = 0.5, P(B) = 3/10 = 0.3, P(AnB) = 1/10 = 0.1

1. Basit yaklaşım: B kümesinde 3 tane sayı var. Bunlardan hem 2ye hem 3e bölünen sadece 6 dır. Buna göre P(A|B) = 1/3 = 0.3333

2. $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{3/10} = \frac{0.1}{0.3} = 0.3333$$

Rassal Değişkenler
(Random Variables)

Rassal Değişken = Raslantı Değişkeni

- İstatistik, genel olarak, rassal bir olayı (ya da deneyi) matematiksel olarak modellemek ve bu model yardımıyla, anakütlenin bilinmeyen karakteristik özellikleri (ortalama, varyans v.b. gibi) hakkında çıkarım yapmak amacıyla kullanılan bir bilim dalıdır.

- Rassal bir olayın modellenmesi, sayısal değerlerle ifade edilen ve rassal değişken olarak adlandırılan değişkenler yardımıyla yapılır.

Rassal Değişken = Raslantı Değişkeni

- Bir örneklem uzayındaki (S) herbir elemanına karşılık gelen bir olasılık değeri atayalım.
- Bu atama işlemini f(S) ile gösterelim.
- f(S) fonksiyonu **rassal değişken** veya rassal fonksiyon olarak adlandırılır.
- S yerine genllikle X, Y, Z gibi büyük harfler kullanılır.
- Kümeler X, Y, Z gibi büyük harflerle
  Kümelerinin aldığı değerler *x*, *y*, *z* gibi küçük harflerle gösterilir.

Örneğin:

X = {Yazı, Tura}

f(X) = {1/2, 1/2}

Rassal Değişken = Raslantı Değişkeni

Bir rassal değişken kesikli (discrete) olabilir.

Bir rassal değişken sürekli (continues) olabilir.

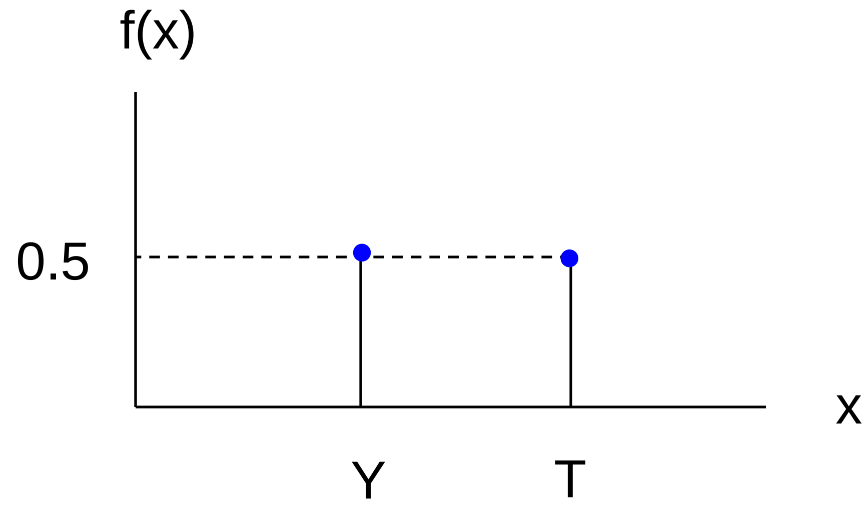
- Değer kümesi (S) **sayılabilir** (countable) olan rassal değişkenler **kesikli,**
- **sayılamayan** (uncountable) olan rassal değişkenler ise **sürekli** olarak isimlendirilir.

Kesikli RD Örnekleri:

dağılımlar

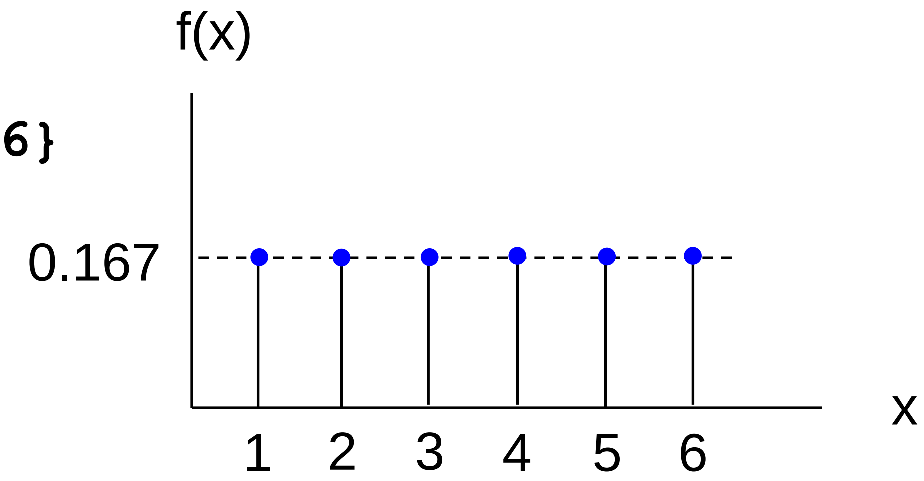
Bir paranın atılması:

```
   X = {  Y,    T}
f(x) = {1/2, 1/2}
```



Bir zarın atılması:

```
  X = {1,2,3,4,5,6}
f(x)= {1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6}
```



Kesikli RD Örnekleri:

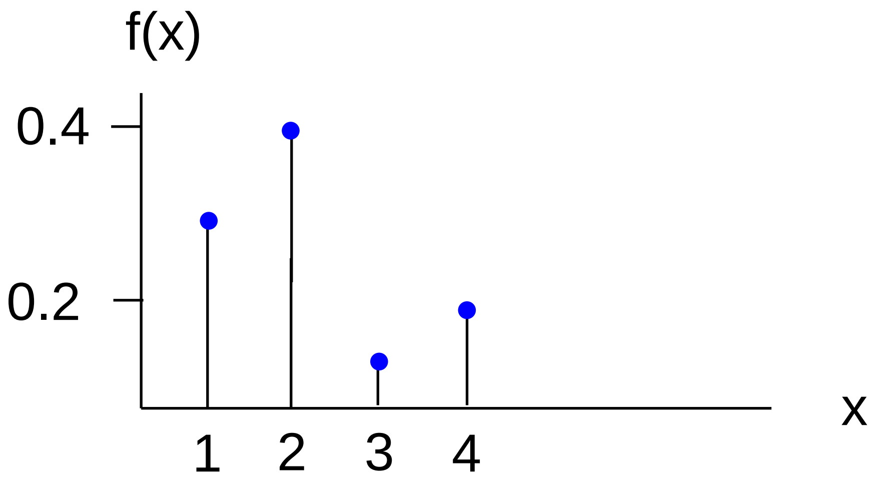
Bir fizik laboratuvarında çalışanların kullandıkları işletim sistemlerinin sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	İşletim sistemi(X)	Kullanıcı sayısı(F)	f(X)=F/100
1.	MS Windows	30	0.3
2.	Linux	40	0.4
3.	MacOS	10	0.1
4.	Diğer	20	0.2
	Toplam	**100**	**1.0**

Buna göre rassal değişken:

X = {1, 2, 3, 4}

f(x) = {0.3, 0.4, 0.1, 0.2}



Kesikli RD Örnekleri:

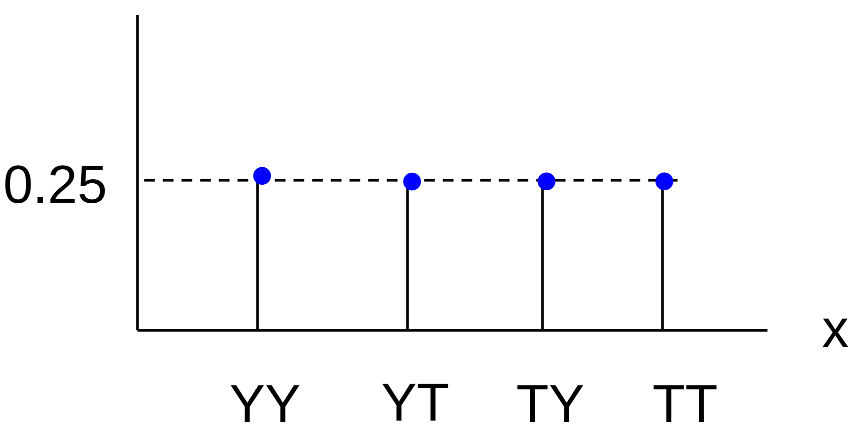
İki paranın atılması:

X = {YY, YT, TY, TT}

f(x) = {1/4, 1/4, 1/4, 1/4}

P(YY) = P (YT) = P(TY) = P(TT) = 0.25

dağılımlar



İki paranın atılması

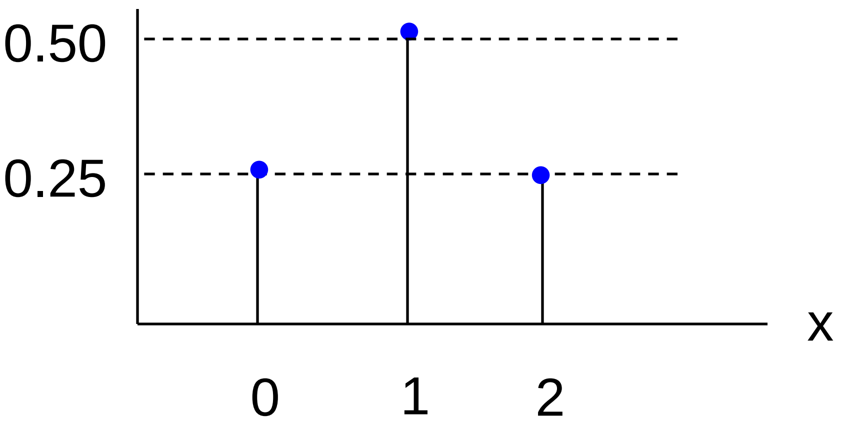
X = {Gelen Tara sayısı} olsun

P(X=0) = P(YY) = 1/4

P(X=1) = P (YT U TY) = P (YT)+P(TY)

= 1/4 +1/4 = 1/2

P(X=2) = P(TT) = 1/4



X = { 0, 1, 2}

f(x) = {1/4, 1/2, 1/4}

Örnek 14:

İki zar atılıyor. X = {zarların toplamı} olsun.

Yani

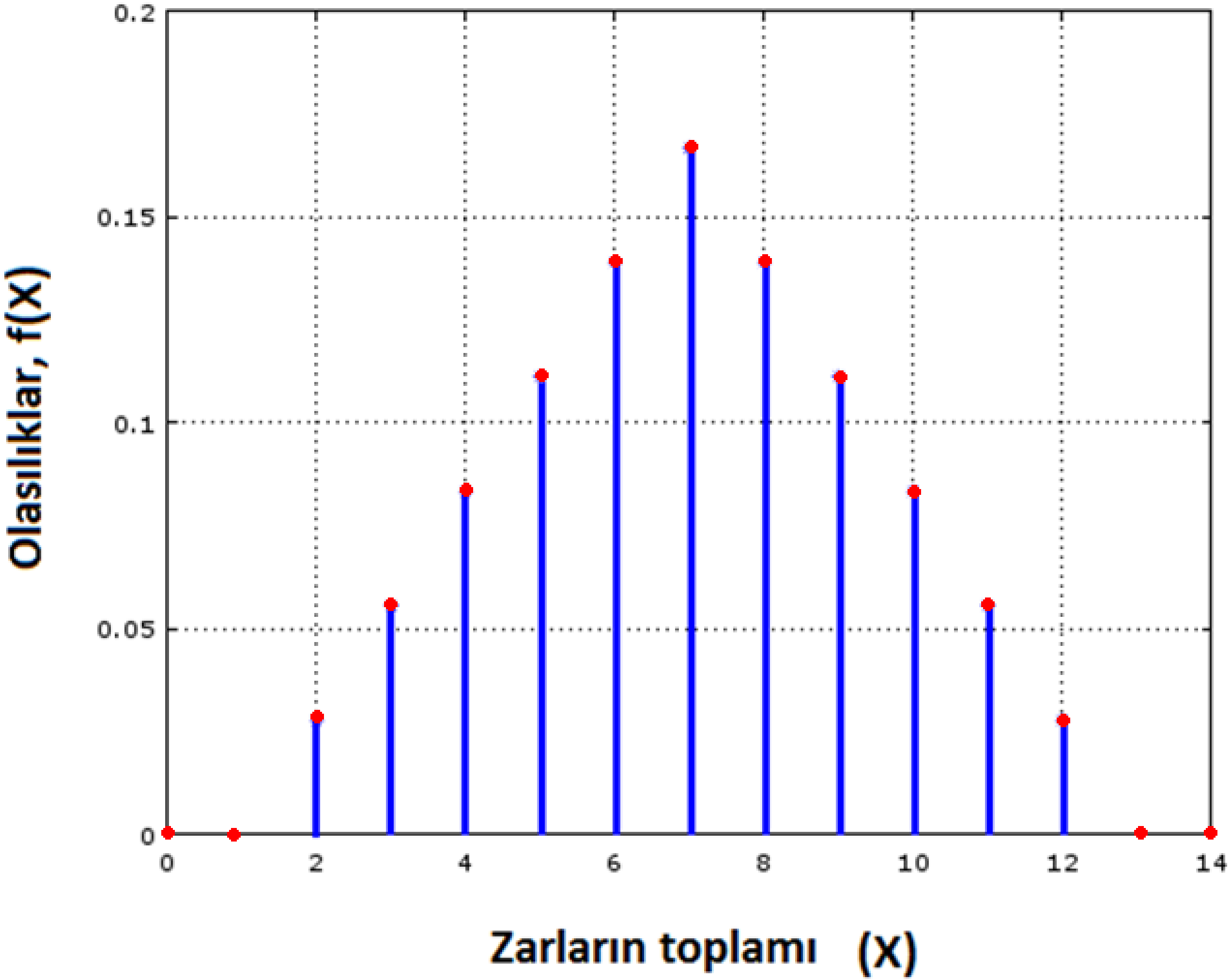
```
    X = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
 f(X) = ?
```

Olasılıklar:

```
P(X=2) = P(1)P(1)  = P11                             = 1/36
P(X=3) = P(1)P(2)+P(2)P(1)  = P12+P21 = 1/36+1/36   = 2/36
P(X=4) = P(1)P(3)+P(3)P(1)+P(2)P(2)  = P13+P31+P22 = 3/36
. . .
```

Olasılıklar yeni gösterimle:

```
P(X= 2) = P11                          = 1/36 = 0.0278
P(X= 3) = P12+P21                      = 2/36 = 0.0556
P(X= 4) = P13+P31+P22                  = 3/36 = 0.0833
P(X= 5) = P14+P41+P23+P32              = 4/36 = 0.1111
P(X= 6) = P15+P51+P24+P42+P33          = 5/36 = 0.1389
P(X= 7) = P16+P61+P25+P52+P34+P43      = 6/36 = 0.1667
P(X= 8) = P26+P62+P35+P53+P44          = 5/36 = 0.1389
P(X= 9) = P36+P63+P45+P54              = 4/36 = 0.1111
P(X=10) = P46+P64+P55                  = 3/36 = 0.0833
P(X=11) = P56+P65                      = 2/36 = 0.0556
P(X=12) = P66                          = 1/36 = 0.0278
```



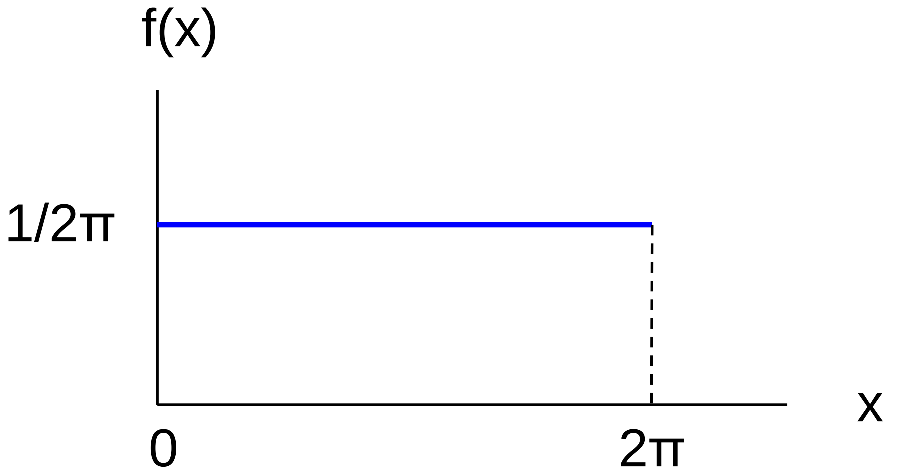
X	f(X)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

$$\sum_i f(x_i) = 1$$ olduğuna dikkat edin.

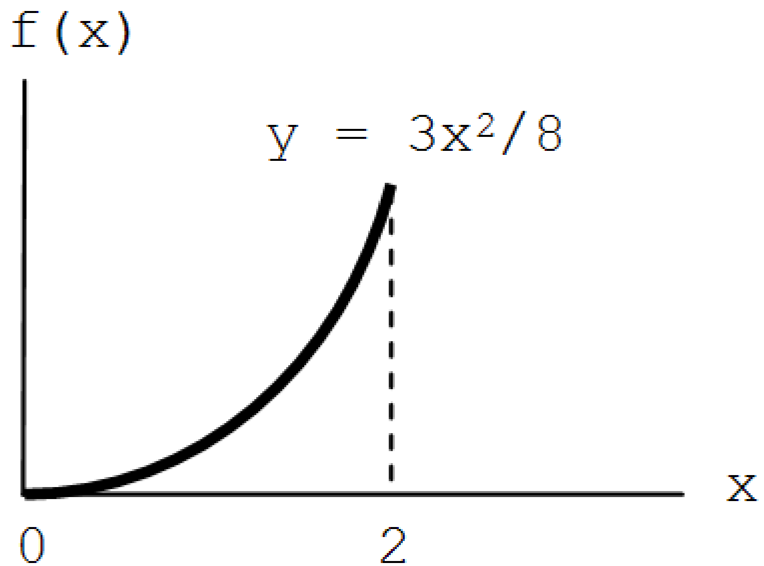
Sürekli RD Örnekleri:

dağılımlar

[0, 2π] aralığında
rastgele açı
$X = [0, 2\pi]$
$f(x) = 1/2\pi$

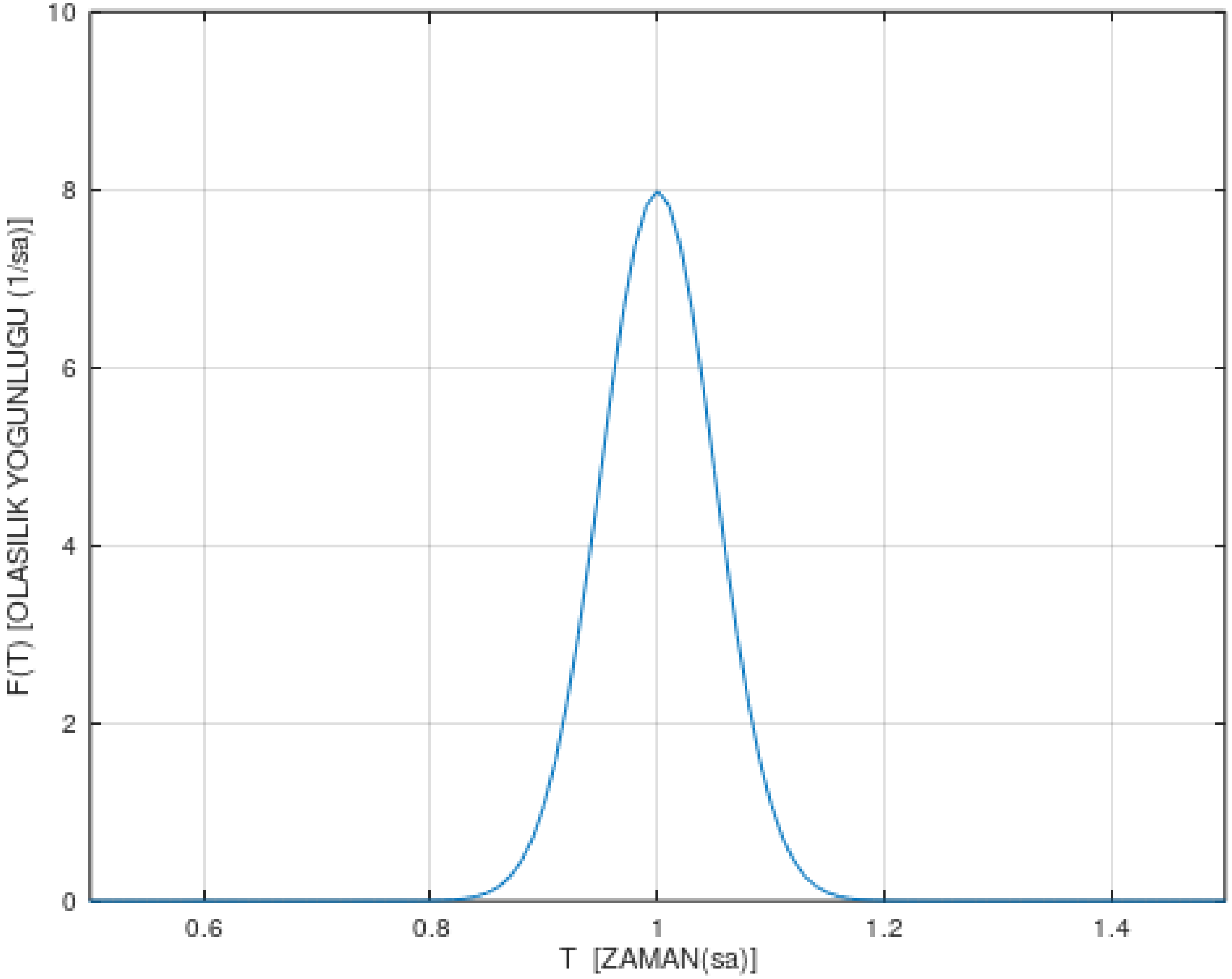


Bir olasılık dağılım
fonksiyonu:
$X = [0, 2]$
$f(x) = 3x^2/8$



Sürekli RD Örnekleri:

Bir bilgisayar programının çalışma süresi:



Raslantı Değişkeni Özellikleri

Kesikli

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_i f(x_i) = 1$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(x_i) = P(a \leq x \leq b)$$

Sürekli

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_a^b f(x)dx = P(a \leq x \leq b)$$

Beklenen Değerler

Beklenen değer yada ortalama değer gösterimi:

$$E\,[\,X\,] \qquad \text{or} \qquad <X> \qquad \text{or} \qquad \bar{x}$$

Tanım:

Kesikli RD: $$E[X] = \sum_i x_i \; f(x_i)$$

Sürekli RD: $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f(x) dx$$

Karelerin Ortalaması

Tanım:

Kesikli RD: $$E[X^2] = \sum_i x_i^2 \; f(x_i)$$

Sürekli RD: $$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \; f(x) dx$$

Ortlalama Kare Kök (**RMS**: Root Mean Square)

$$RMS = \sqrt{E[X^2]}$$

Varyans

Tanım:

Kesikli RD: $$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \ f(x_i)$$

Sürekli RD: $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \ f(x) dx$$

Aşağıdaki formülü kanıtlayın:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \end{aligned}$$

Standard Sapma

Tanım: Varyansın karekökü standart sapmadır.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{E[X^2] - (E[X])^2} \\ &= \sqrt{< X^2 > - < X >^2} \end{aligned}$$

Bu formülün Mühendislikte ve Kuantum Fiziğinde çok ciddi uygulamaları vardır.

Örnek 15: Zarın atılması

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f(x) = \{1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6\}$$

Aşağıdakileri bulun:

(a) $\langle X \rangle = 1 * 1/6 + 2 * 1/6 + 3 * 1/6 + \ldots = 3.50$

(b) $\langle X^2 \rangle = 1^2 * 1/6 + 2^2 * 1/6 + 3^2 * 1/6 + \ldots = 15.17$

(c) RMS = karekök($\langle X^2 \rangle$) $= 3.89$

(d) Varyans $= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 15.17 - (3.5)^2 = 2.92$

(e) std.sapma = karekök(2.92) $= 1.71$

Örnek 16:

Bir fizik laboratuvarında çalışanların kullandıkları işletim sistemleri (1:Windows, 2:Linux, 3:MacOS, 4:Diğer)

```
   X = {1, 2, 3, 4}
f(x) = {0.3, 0.4, 0.1, 0.2}
```

(a) Bir araştırmacının Windows veya Linux kullanma olasılığı:

P(X = 1 veya X = 2) = 0.3 + 0.4 = 0.7

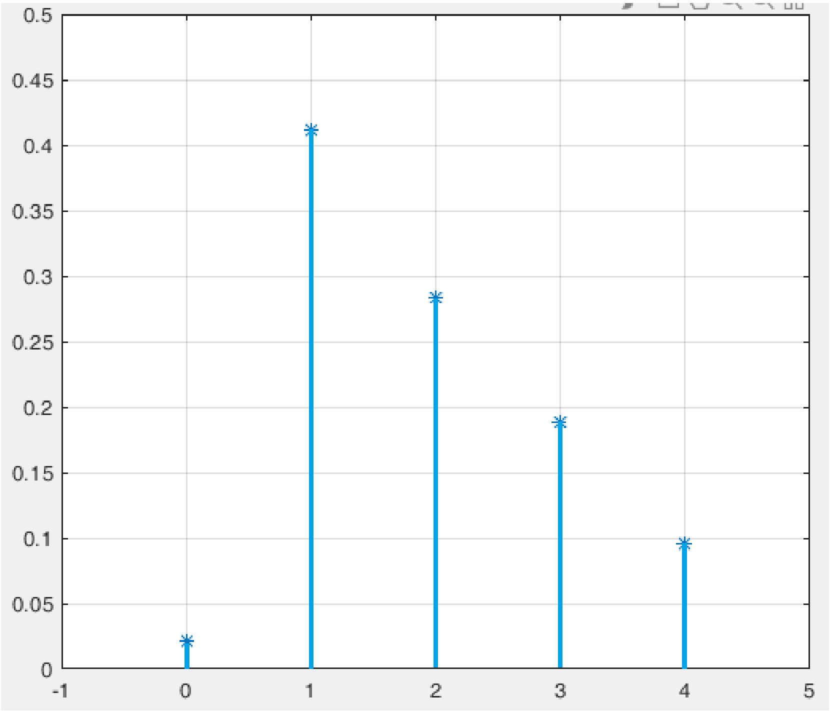
(b) Windows kullanmama olasılığı:

1 - P(X = 1) = 1 – 0.3 = 0.7

Örnek 17

Bir şehirdeki evlerde bulunan telefon sayısı (x) ve karşılık gelen dağılım aşağıdaki gibidir.

x	f(x)
0	0.021
1	0.412
2	0.283
3	0.188
4	0.096



Rastgele bir ev seçiliyor. Bu evde

(a) Telefon olmama olasılığı: $P(x=0) = 0.021$

(b) Ikiden az telefon olma olasılığı: $P(X<2) = 0.021 + 0.412 = 0.433$

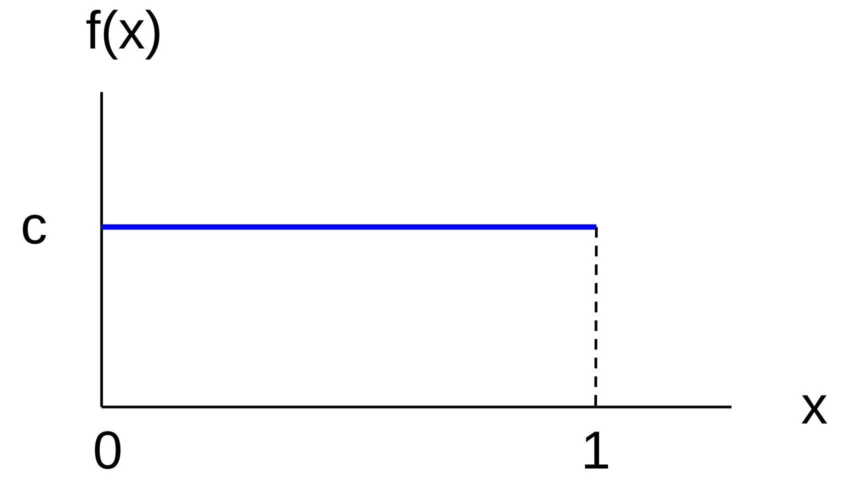
(c) En az üç telefon bulunma olasılığı: $P(X>=3) = 0.188 + 0.096 = 0.284$

Örnek 18

Düzgün dağılımı düşünün.

X = [0, 1]

f(x) = c = sabit



(a) c sabiti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \longrightarrow \int_{0}^{1} c\,dx = c(1-0) = 1 \longrightarrow c = 1$$

(b) ortalamalar

$$< X >= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} xdx = [x^2/2]_0^1 = 1^2/2 - 0^2/2 = 1/2 = 0.5$$

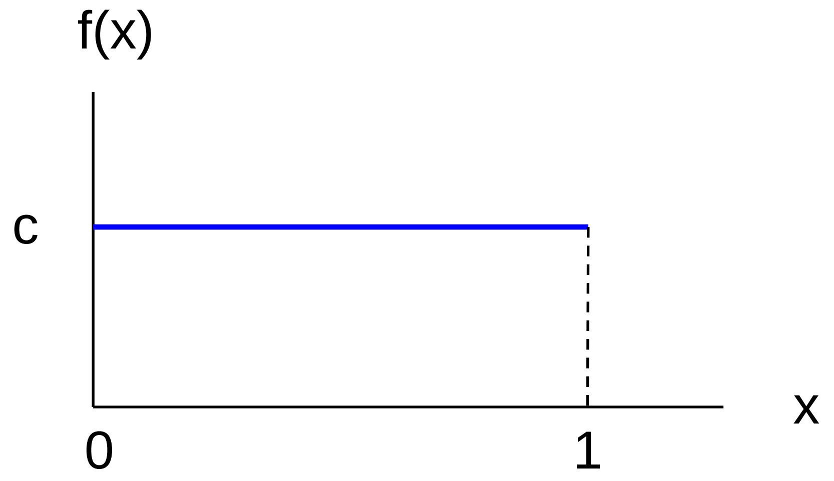
$$< X^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{1} x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1^3/3 - 0^3/2 = 1/3 = 0.333$$

Örnek 18 - devam

Düzgün dağılımı düşünün.

X = [0, 1]

f(x) = c = sabit



(c) standard sapma

$$\sigma = \sqrt{<X^2> - <X>^2} = \sqrt{1/3 - (1/2)^2} = 1/\sqrt{12} = 0.289$$

yada

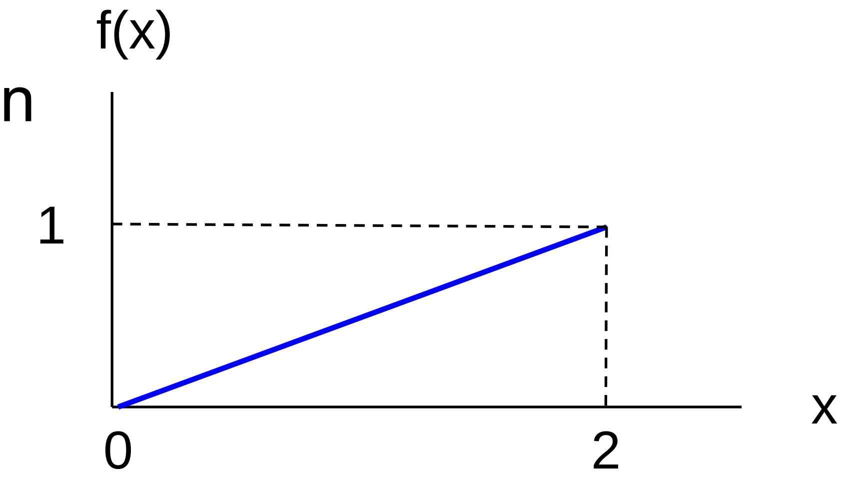
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \, f(x) dx = \int_0^1 (x - 1/2)^2 \, dx = 1/12$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1/12} = 0.289$$

Örnek 19

Yandaki üçgen dağılımı düşünün

X = [0, 2]



$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{kx} & \mathbf{0<x<2} \\ \mathbf{0} & \textbf{aksi halde} \end{cases}$$

(a) *k* değeri nedir?

k = eğim = 1/2

yada $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \longrightarrow \int_0^2 kxdx = k[\frac{x^2}{2}]_0^2 = 1 \longrightarrow k = 1/2$

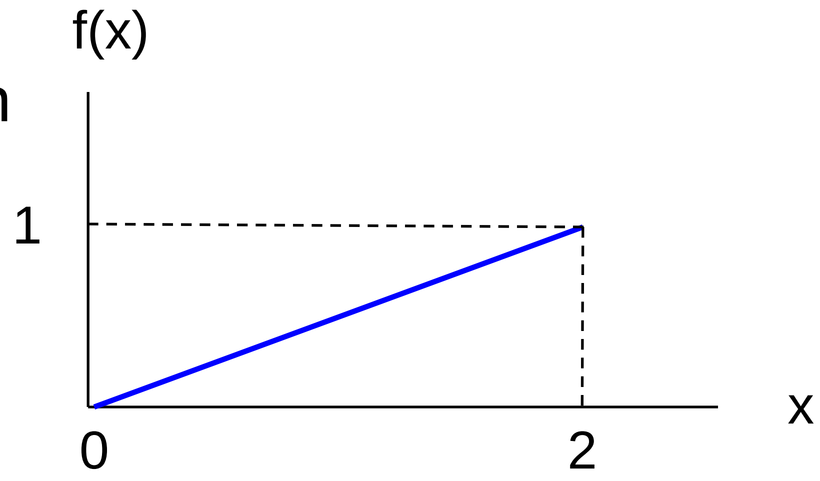
Örnek 19 - devam

Yandaki üçgen dağılımı düşünün

X = [0, 2]

f(X) = x/2

(b) ortalama



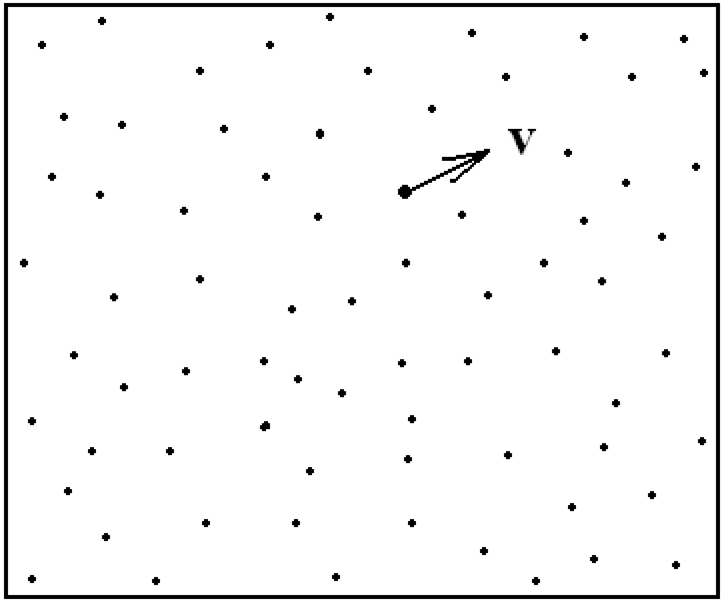
$$< X > = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{2} x \frac{x}{2} dx = [\frac{x^3}{2.3}]_0^2 = \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{4}{3} = 1.333$$

Örnek bir Sürekli Dağılım

Gaz atomarın bir kap içindeki hız (v) dağılımları Maxwell Dağılım fonksiyonu ile bellidir:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3}\, v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)$$

Gas Atoms in a container

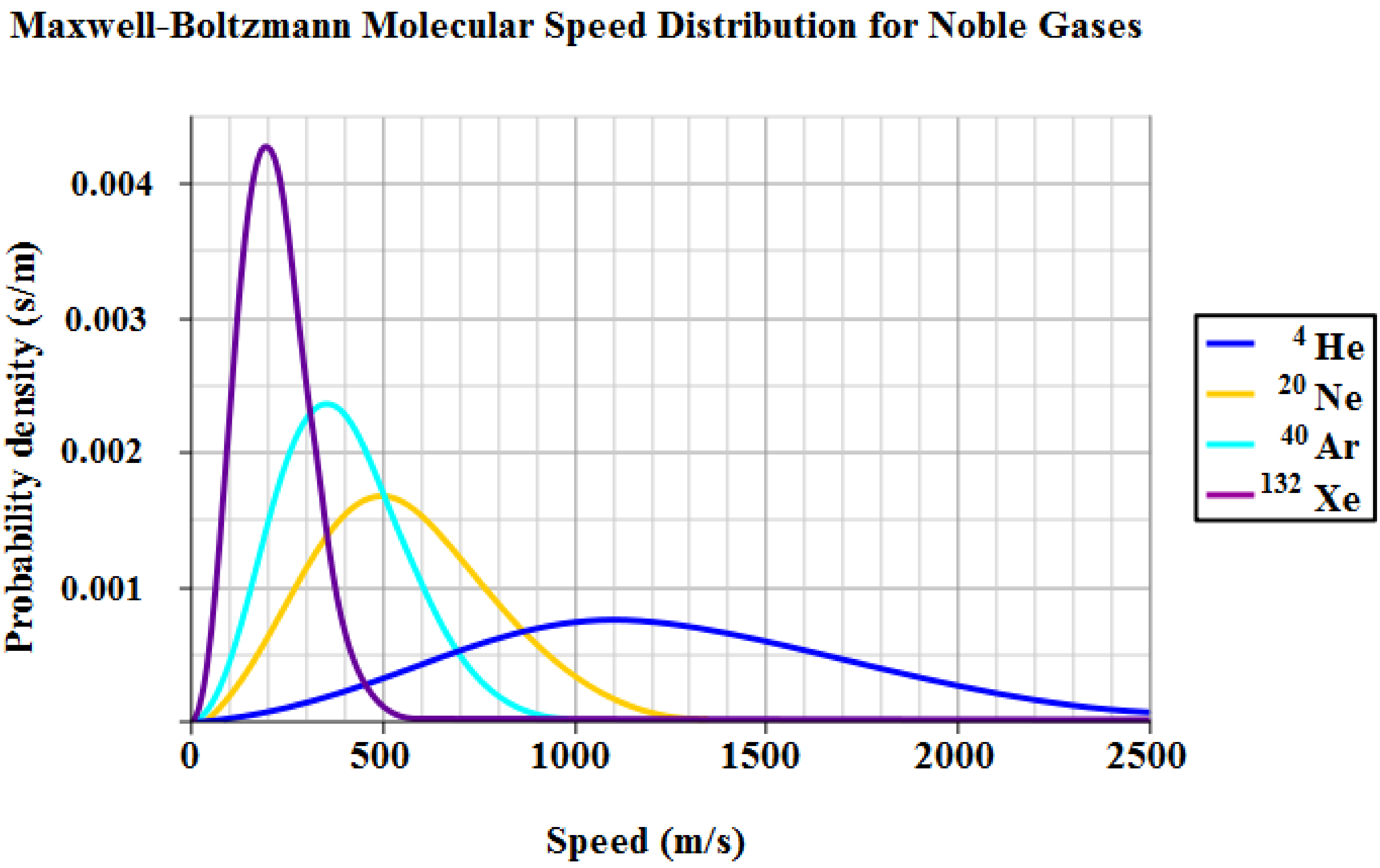


burada

m = molekülün kütlesi

T = mutlak sıcaklık (Kelvin)

k = Bolzman sabiti (k = 1.38065×10^{-23} J/K)



Maxwell-Boltzmann Molecular Speed Distribution for Noble Gases
Probability density (s/m)
0.004
0.003
0.002
0.001
0
500
1000
1500
2000
2500
Speed (m/s)
4 He
20 Ne
40 Ar
132 Xe

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{kT}\right)^3} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2kT}\right)$$

Hızın ortalama (beklenen) değeri:

$$<v> = \int_0^\infty v\ f(v)dv \qquad <v^2> = \int_0^\infty v^2\ f(v)dv$$

Moleküllerin ortalama (beklenen) kinetik enerjisi:

$$<K> = \frac{1}{2} m <v^2>$$

Gaz Basıncı (*H* = gazın hacmi):

$$P = \frac{2<K>}{3H}$$