

DÜZLEMSEL BİR 5-ÇUBUK MEKANİZMASININ YAKLAŞIK MATEMATİKSEL MODELİNİN ÇIKARILMASI VE DENETİMİ

Gürsel ALICI, Sadettin KAPUCU, Sedat BAYSEÇ

Gaziantep Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi
Makina Mühendisliği Bölümü, 27310 Gaziantep
E-mail: gursel@gantep.edu.tr

Anahtar Kelimeler: matematiksel model, PD denetimi, 5-çubuk mekanizması

Özet

Bu çalışma iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada, kapalı zincir 5-çubuk mekanizmasının, açık zincir bir mekanizma gibi (robot manipülatörleri) matematiksel modelinin çıkarılarak en az işlemle sayısal olarak çözülmesi sunulmaktadır. Temel fiziksel yasalar kullanılarak model çıkarıldığı zaman çok sayıda işlem gerektirmekte ve dolayısıyla çözümü de çok zaman almaktadır. Bundan kaçınmak için, mekanizma açık zincir bir mekanizma gibi modellenerek, en son çubuğun yere bağlı konumda daima durması için dışarıdan bağ kuvvetleri uygulanarak mekanizmanın kapalı zincir bir mekanizma gibi davranması sağlanmıştır. Bu yolla oluşturulmuş modeller daha basit olup, daha az sayıda işlem gerektirmektedir. Böyle mekanizmaların matematiksel modelleri zaten doğrusal olmadıklarından, kapalı form çözümlerini elde etmek mümkün olmamakta, sayısal çözüm istemektedir. Bu çalışmada, sayısal çözüm doğrudan doğruya modelin çıkarılması aşamasına kaydırılmıştır. Sistemin toplam mekanik enerjisi sayısal çözüm esnasında hesaplanarak matematiksel modelin doğruluğu gerçekleşmiştir. Çalışmanın ikinci aşamasında, yaklaşık matematiksel model kullanılarak PD denetim yöntemi mekanizmaya uygulanmış, gayet olumlu benzetim sonuçları alınmıştır.

1. GİRİŞ

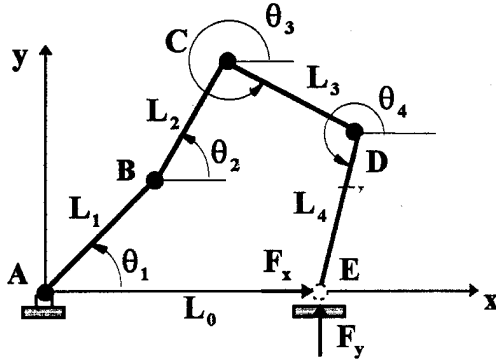
Herhangi bir dinamik sistemin çözülmesinde ve denetiminde ilk ve en önemli adım, ona en uygun bir matematiksel model elde etmektir. Çok elemanlı ve bağlı dinamik sistemlerin matematiksel modellerinin elde edilmesi üzerine çok sayıda çalışma mevcuttur, [2-11]. Kullanılan metotların avantajları ve dezavantajları i) modelin nasıl formüle edildiğine, ve ii) modeldeki belirlenmemiş çarpanların, bağ denklemleri vasıtasıyla yok edilerek, genelleştirilmiş koordinat sayısının sistemin serbestlik derecesine indirgenmesine bağlıdır, [2], [3], [4]. Kane denklemlerinin bağlı sistemlerin

çözülmesinde önemli avantajlar sağladığı belirlenmiştir, [8], [11]. Son yıllarda paralel manipülatörlerin kinematik ve dinamik çözülmesi üzerine yoğun çalışmalar yapılmıştır, [12]. Paralel manipülatörlerin en basitleri, iki serbestlik dereceli düzlemsel beş çubuk mekanizmalarıdır, [1]. Bunların sayısı 32 tanedir. Ancak, pratikte önemi olanlar sadece altı tanedir. Bu çalışmada, bunlardan sadece dönel eklemlerden oluşan beş çubuk mekanizması gözönüne alınmıştır. Böyle bir mekanizmanın matematiksel modelini iki genelleştirilmiş koordinat cinsinden ortaya koymak çok işlem gerektirmektedir. Ayrıca, böyle bir model çıkarılsa dahi, kapalı form çözümü yoktur, sayısal olarak çözülmesi gerekmektedir, [5]. İşte bu makalede, tam matematiksel modeli çıkarmak yerine, mekanizmanın yere bağlı olduğu eklemlerden biri yok sayılarak, mekanizmanın açık zincir bir RRRR manipülatörü gibi modellenerek, uç noktaya bir bağ kuvvet vektörünün uygulanmasıyla uç noktanın daima istenen yerde durması sağlanmıştır. Böylece, açık zincir RRRR manipülatörünün, kapalı zincir bir 5-çubuk mekanizması gibi davranması sağlanmıştır. En uç noktada olması gereken bağ (tepki) kuvvetleri, oransal ve türevsel denetim yasası kullanılarak hesaplanmış ve RRRR manipülatörü matematiksel modeli sayısal olarak çözülmüştür. Sistemin toplam mekanik enerjisi hesaplanmış ve daima sabit olduğu görülerek, matematiksel modelin ve sayısal çözümün doğru olduğu sonucuna varılmıştır. Yaklaşık matematiksel model kullanılarak, mekanizma PD denetim yasası altında benzetime tabi tutulmuş ve olumlu sonuçlar alınmıştır. Matematiksel modellerinin çıkarılması çok işlem gerektiren kapalı zincir mekanizmaların benzetim, denetim ve çözülmesinde bu metot kullanılabilir.

2. DÜZLEMSEL PARALEL 5-ÇUBUK MEKANİZMASI

Bu çalışmaya konu olan mekanizma Şekil 1'de gösterilmiştir. Beş çubuk birbirine sadece dönel eklemlerle bağlanmıştır. Eklemlerden sadece iki aktif,

geri kalan üçü pasif durumdadır. Mekanizmanın paralel olması için $L_1 = L_4$ ve $L_2 = L_3$ olmalıdır. Hareketli çubukların ağırlık merkezlerinin A, B, C, ve D noktalarından uzaklıkları sırasıyla q_1, q_2, q_3 ve q_4 olarak tanımlanmıştır. E noktasının yere bağlı olmadığı kabul edilerek, bu noktayı daima $(L_0, 0)$ koordinatında tutmak için Orantı +Türev tipi denetim yasası kullanılarak F_x ve F_y kuvvetleri hesaplanmıştır.



Şekil 1: Düzlemsel paralel 5-çubuk mekanizması.

3. MATEMATİKSEL MODEL

Şekil 1'de verilen paralel manipülörün E noktasının yere bağlı olmadığı kabul edilirse, mekanizma açık zincir RRRR manipülör yapısına dönüşür ve dört serbestlik derecesine sahip olur. Lagrange yöntemi kullanılarak matematiksel model aşağıdaki formda elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = M(\theta_i)\ddot{\theta} - C(\theta_i, \dot{\theta}_i) - G(\theta_i) \quad (1)$$

Bu denklemde,

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 q_1^2 + (m_2 + m_3 + m_4) L_1^2 + I_1 \\ m_{12} &= (L_1 q_2 m_2 + L_1 L_2 m_3 + L_1 L_2 m_4) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_{13} &= (L_1 q_3 m_3 + L_1 L_3 m_4) \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ m_{14} &= m_4 q_4 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_4) \\ m_{22} &= m_2 q_2^2 + (m_3 + m_4) L_2^2 + I_2 \\ m_{23} &= (L_2 q_3 m_3 + L_2 L_3 m_4) \cos(\theta_2 - \theta_3) \end{aligned}$$

$$m_{24} = m_4 q_4 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$m_{33} = m_3 q_3^2 + m_4 L_3^2 + I_3$$

$$m_{34} = m_4 q_4 L_3 \cos(\theta_3 - \theta_4)$$

Kütle matrisi simetrik olduğundan

$$m_{21} = m_{12}, \quad m_{31} = m_{13}, \quad m_{32} = m_{23},$$

$$m_{41} = m_{14}, \quad m_{42} = m_{24}, \quad m_{43} = m_{34},$$

$$c_{11} = (L_1 q_2 m_2 + L_1 L_2 m_3 + L_1 L_2 m_4) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$c_{12} = (L_1 q_3 m_3 + L_1 L_3 m_4) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - \theta_3)$$

$$c_{13} = L_1 q_4 m_4 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_4 \sin(\theta_1 - \theta_4)$$

$$c_1 = c_{11} + c_{12} + c_{13}$$

$$g_1 = (m_1 q_1 + m_2 L_1 + m_3 L_1 + m_4 L_1) g \cos \theta_1$$

$$c_{21} = (L_1 q_2 m_2 + L_1 L_2 m_3 + L_1 L_2 m_4) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$c_{22} = (L_2 q_3 m_3 + L_2 L_3 m_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$c_{23} = L_2 q_4 m_4 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$c_2 = c_{21} + c_{22} + c_{23}$$

$$g_2 = (m_2 q_2 + m_3 L_2 + m_4 L_2) g \cos \theta_2$$

$$c_{31} = (L_2 q_3 m_3 + L_3 L_2 m_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$c_{32} = (L_1 q_3 m_3 + L_1 L_3 m_4) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)$$

$$c_{33} = L_3 q_4 m_4 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)$$

$$c_3 = c_{31} + c_{32} + c_{33}$$

$$g_3 = (m_3 q_3 + m_4 L_3) g \cos \theta_3$$

$$c_{41} = L_1 q_4 m_4 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_4)$$

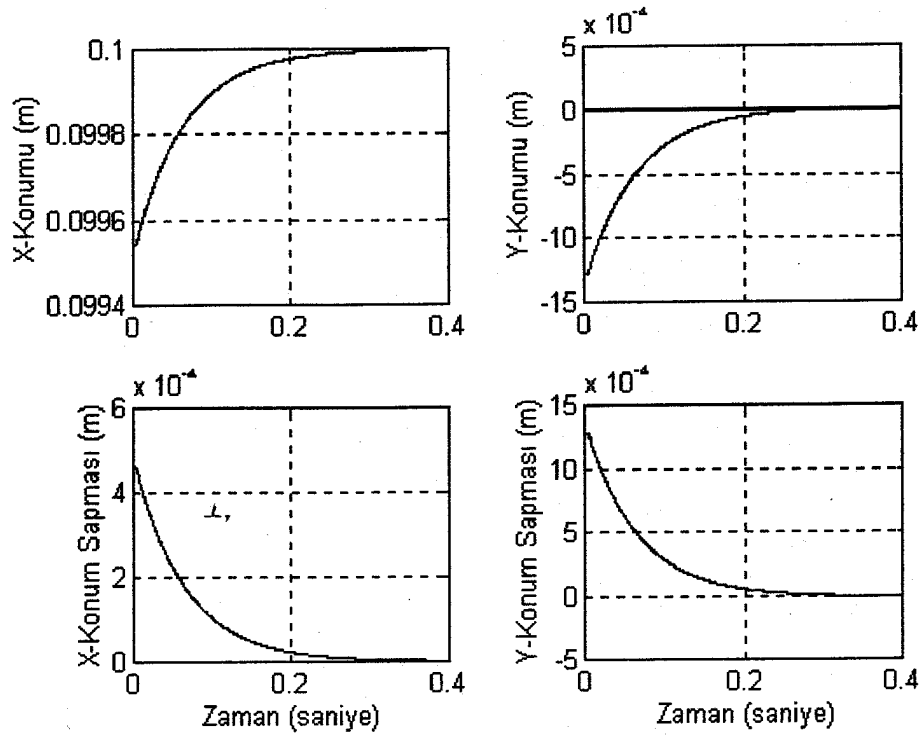
$$c_{42} = L_2 q_4 m_4 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)$$

$$c_{43} = L_3 q_4 m_4 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)$$

$$c_4 = c_{41} + c_{42} + c_{43}$$

$$g_4 = m_4 q_4 g \cos \theta_4$$

E uç noktasını $(L_0, 0)$ konumunda daima tutmak için gerekli bağ kuvvetleri aşağıdaki gibi PD denetim yasası uygulanarak hesaplanır.



Şekil 2: Yaklaşık matematiksel model kullanılarak E noktasının konumu ve konum sapmaları.

$$\begin{aligned} F_x &= K_p (L_0 - X_c) - K_v \dot{X}_c \\ F_y &= K_p (-Y_c) - K_v \dot{Y}_c \end{aligned} \quad (2)$$

Burada,

$$X_c = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 + L_4 \cos \theta_4,$$

$$\dot{X}_c = \frac{dX_c}{dt}$$

$$Y_c = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 + L_4 \sin \theta_4,$$

$$\dot{Y}_c = \frac{dY_c}{dt}$$

(3)

Bu kuvvetlerden dolayı hareketli dört ekleme yansıyan genelleştirilmiş torklar, aşağıdaki denklem kullanılarak elde edilir.

$$\tau_i = F_x \frac{\partial X_E}{\partial \theta_i} + F_y \frac{\partial Y_E}{\partial \theta_i}$$

(4)

Buna göre,

$$\tau_1 = -F_x L_1 \sin \theta_1 + F_y L_1 \cos \theta_1$$

$$\tau_2 = -F_x L_2 \sin \theta_2 + F_y L_2 \cos \theta_2$$

$$\tau_3 = -F_x L_3 \sin \theta_3 + F_y L_3 \cos \theta_3$$

$$\tau_4 = -F_x L_4 \sin \theta_4 + F_y L_4 \cos \theta_4$$

(5)

Tablo 1: Mekanizmanın atalet ve geometrik parametreleri.

Parametreler	1. Çubuk	2. Çubuk	3. Çubuk	4. Çubuk
Kütle (kg)	3.4	2.5	1.8	1.4
Atalet Momenti (kg m ²)	1.75	1.38	1.3	1.0
Uzunluk (m)	0.1	0.15	0.15	0.1

Denklem 1'den ivme vektörü aşağıdaki gibi bulunur;

$$\ddot{\Theta} = M^{-1}(\theta_i) \{ \Gamma + C(\theta_i, \dot{\theta}_i) + G(\theta_i) \}$$

(6)

Runge-Kutta sayısal entegrasyon algoritması kullanılarak sistemin modeli çözülür.

4. SAYISAL ÖRNEK

Denklem 1 çözülürken Tablo 1'de verilen sayısal değerler kullanılmıştır.

Her çubuğun ağırlık merkezinin tam ortada olduğu kabul edilerek, $L_0 = 0.1$ m, $K_p = 3 \times 10^6$ ve $K_v = 2 \times 10^5$ olarak alınmıştır. Sayısal çözüme başlayabilmek için $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 85^\circ$, $\theta_3 = 296^\circ$, $\theta_4 = 240^\circ$ ve $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4 = 0.0$ rad/sec ilk değerleri alınmıştır. E noktasını $(L_0, 0)$ koordinatlarına getirmek için PD denetim yöntemiyle elde edilen sonuçlar Şekil 2'de gösterilmiştir.

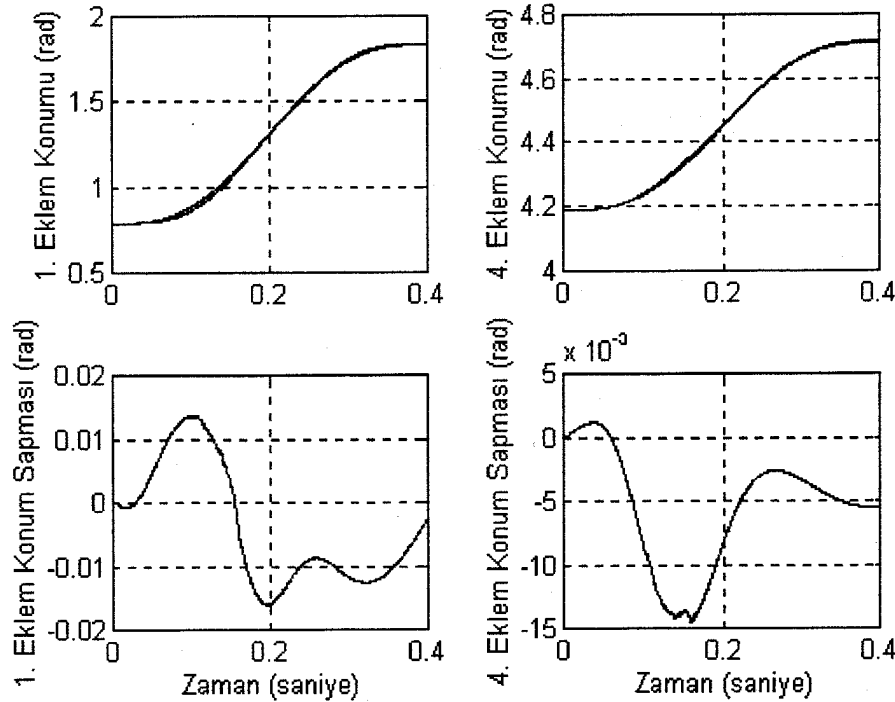
5. MEKANİZMANIN DENETİMİ

Şekil 2'de görüldüğü gibi yaklaşık matematiksel model vasıtasıyla mekanizmayı istenen konumda tutmak mümkündür. Yine PD denetim yöntemi kullanılarak mekanizmanın iki aktif ekleminin (A ve D) sikloit bir yörüngeyi izlemesi istenmiştir. Birinci ve dördüncü eklemlere uygulanması gereken torklar aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}\tau_1 &= K_1^p(\theta_1^d - \theta_1) + K_1^v(\dot{\theta}_1^d - \dot{\theta}_1) \\ \tau_4 &= K_4^p(\theta_4^d - \theta_4) + K_4^v(\dot{\theta}_4^d - \dot{\theta}_4)\end{aligned}$$

(7)

Bu denklemlerde, θ_1^d ve $\dot{\theta}_1^d$ ilgili eklemin izlemesi gereken açısal pozisyonunu ve açısal hızını, θ_4 ve $\dot{\theta}_4$ ilgili eklemin açısal pozisyonunu ve açısal hızını, K_1^p ilgili eklemin oransal kazanç katsayısını ve K_1^v ilgili eklemin türevsel kazanç katsayısını ifade etmektedir. Eklemlerin ilk konumu $\theta_1 = 45^\circ$ ve $\theta_4 = 240^\circ$ olarak alınmıştır. $K_1^p = 7000$, $K_4^p = 600$ ve $K_1^v = 100$, $K_4^v = 300$ kazanç katsayıları kullanılarak Şekil 3'teki benzetim sonuçları alınmıştır. Görüldüğü gibi, birinci ve dördüncü eklemlerdeki sapmalar son derece önemsizdir. PD denetim altında E noktasının konumu ve konum sapmaları ayrıca Şekil 4'te verilmiş olup, mekanizma kapalı zincir bir mekanizmaymış gibi çok az bir hatayla E noktası konumunda kalmaktadır. Bu sonuç aynı zamanda matematiksel modeli bir kez daha gerçeklemektedir.

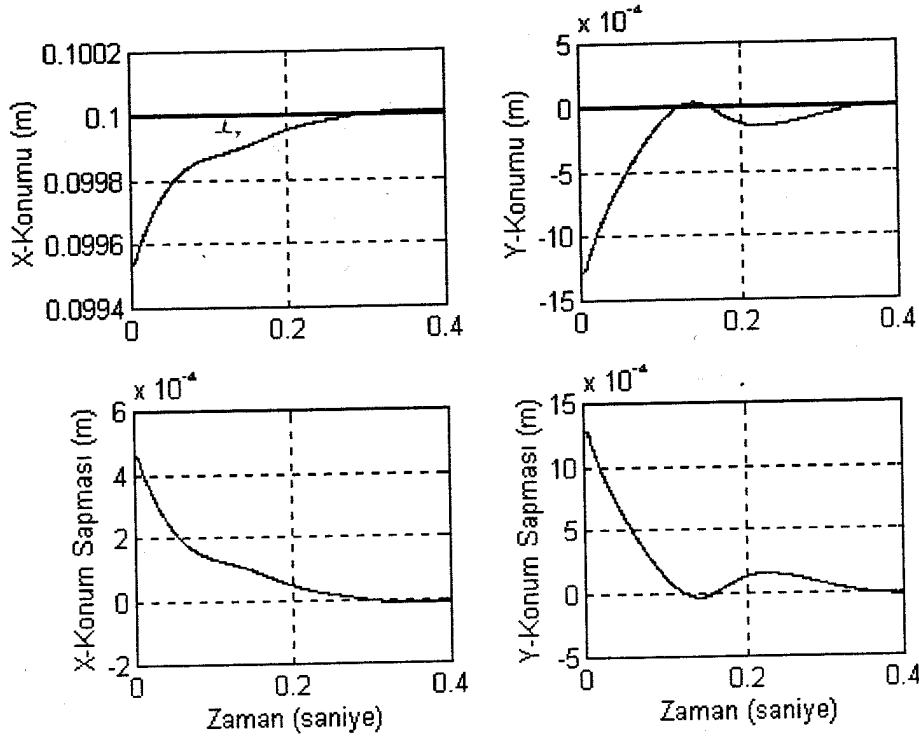


Şekil 3: PD denetim yöntemi ve yaklaşık matematiksel model kullanılarak elde edilen birinci ve dördüncü eklemlerin pozisyonları ve pozisyon sapmaları.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, düzlemsel ve paralel bir 5-çubuk mekanizmasının yaklaşık matematiksel modelinin çıkarılması ve bu modelin kullanılarak PD yöntemiyle denetimi sunulmuştur. Böyle mekanizmaların matematiksel modelleri zaten doğrusal olmadıklarından, kapalı form çözümlerini elde etmek mümkün olmamakta ve sayısal çözüm gerektirmektedir. Bu çalışmada, sayısal çözüm doğrudan doğruya modelin çıkarılması aşamasına kaydırılmıştır. Böyle oluşturulmuş modeller daha basit

olup, daha az sayıda işlem gerektirmektedir. Mekanizmayı hareket ettiren birinci ve dördüncü eklemlerin, sikloit bir hareket profili izlemesi için elde edilen benzetim sonuçları verilmiştir. Benzetimlerde kullanılan kazanç değerleri sınamaya-yanılma yöntemiyle elde edilmiş olup, en iyi sonucu veren değerlerdir. Sunulan benzetim sonuçları, matematiksel modellerinin çıkarılması çok işlem gerektiren kapalı zincir mekanizmaların benzetim, denetim ve çözümlenmesinde bu çalışmada verilen metodun rahatlıkla kullanılabileceğini ortaya koymuştur.



Şekil 4: Birinci ve dördüncü eklemlerin PD yöntemiyle denetimi esnasında E noktasının konumu ve konum sapmaları.

7. KAYNAKLAR

- [1] Alıcı, G. "Determination of Singularity Contours for Five-bar Planar Parallel Manipulators", *Robotica*, Vol:18, s., 2000.
- [2] Wampler, C., Buffinton, K., Shu-hui, J., "Formulation of Equations of Motion for Systems subjected to Constraints", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol:52, s.465 – 470, June 1985.
- [3] Ider, S. K., Amirouche, F. M. L., "On the Constraint Violations in the Dynamic Simulations of Multibody Systems", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol:111, s.238 – 243, June 1989.
- [4] Ellis, R. E., Ricker, S. L., "Two Numerical Issues in Simulating Constrained Robot Dynamics", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol:24, No:1, s.19 – 26, January 1994.
- [5] Bayseç, S., Alıcı, G., "Approximate Solution Methods for the Dynamic Equations of Planar Robot Manipulators", *TR. J. Of Engineering and Environmental Sciences*, Vol:21, s.89 – 100, 1997.
- [6] Kamman, J. W., Huston, R. L., "Dynamics of Constrained Multibody Systems", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol:51, s.899 – 903, December 1984.
- [7] Yun, X., Sarkar, N., "Unified Formulation of Robotic Systems with Holonomic and Nonholonomic

Constraints", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol:14, No:4, s. 641 – 650, August 1998.

[8] T. R. Kane, Levinson, D. A, Dynamics: Theory and Applications, McGraw-Hill, New York, 1985.

[9] Bayseç, S., Jones, J. R., "A Generalised Approach for the Modelling of Articulated Open Chain Planar Linkages", Robotica, Vol:15, s. 523 – 531, 1997.

[10] Kapucu, S., Bayseç, S., "Comparison of Simulation Effectiveness of Motion Equation Generation Methods for Articulated Rigid Body Systems", TR. J. Of Engineering and Environmental Sciences, Vol:21, s.101 – 117, 1997.

[11] Kane, T. R., Levinson, D. A., " A Method for Testing Numerical Integrations of Equations of Motion of Mechanical Systems", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol:55, s.711 – 715, September 1988.

[12] Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T. S., "The Stewart Platform Manipulator: A Review", Mechanism and Machine Theory, Vol: 35, s.15 – 40, 2000.