BÖLÜM 5

5- İNTEGRAL KAVRAMI

5-1 İlkel Fonksiyon veya Belirsiz İntegral

Bir fonksiyonun türevinin nasıl alındığını biliyoruz.Bu bölümde türevi alınmış bir fonksiyonun ilkelinin(önceki halinin) nasıl bulunacağını inceleyeceğiz.Yapacağımız bu işleme "İntegral alma" veya fonksiyonun ilkelini bulma işlemi denir.Bu işlem türev alma işleminin tersidir.

Tanım
Türevi F(x) yada diferansiyeli f(x)dx olan f(x) fonksiyonuna f(x) fonksiyonun bir ilkeli ya da belirsiz integrali denir ve $\int f(x)dx = F(x)$ şeklinde gösterilir.Yani F'(x)=f(x)

Örnek

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ fonksiyonu (-∞,∞) aralığında f(x)=x^2 fonksiyonunun bir ilkelidir.Çünkü

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Örnek

$F(x) = 2\sqrt{x}$ fonksiyonu (0,∞) aralığında $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun bir ilkelidir.

Çünkü $F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2\cdot(\sqrt{x})' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$

Örnek

$F(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu (-∞,∞) aralığında $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun ilkeli değil
Çünkü F'(x) = f(x) eşitliği x = 0 için sağlanmıyor.
(-∞,0) aralığında F(x) fonksiyonu f(x) fonksiyonunun ilkelidir.

ALIŞTIRMALAR

F(x) fonksiyonu f(x) fonksiyonunun ilkelimidir?

a) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty,\infty)$

b) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $x \in (-\infty,\infty)$

c) $F(x) = \frac{1}{7} \cdot x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty,\infty)$

d) $F(x) = -\frac{1}{6x^6}$, $f(x) = \frac{1}{x^7}$, $x \in (0,\infty)$

e) $F(x) = 3-\sin(x)$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty,\infty)$

f) $F(x) = 5-x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty,\infty)$

g) $F(x) = \cos x-4$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty,\infty)$

h) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 2$, $f(x) = \frac{1}{2x^3}$, $x \in (-\infty,0)$

5-2 Başlangıç Şartları ve Özel Çözümler.

Biz biliyoruz ki ;

$f(x) = x^2$, ise $f'(x) = 2x$
$f(x) = x^2+1$ ise $f'(x) = 2x$
$f(x) = x^2-4$ ise $f'(x) = 2x$

Bu türevleri tersinden düşünelim.
Yani $f(x) = 2x$ ise $f(x) = x^2+C$
Çünkü $F'(x) = (x^2+C)' = 2x = f(x)$

Yukarıda üç aynı fonksiyonun türevi alındığında tek bir fonksiyon elde edildiğini (sabitin türevi sıfır olduğundan) biliyoruz.Bu türevi alınmış fonksiyonlar integralleri alındığında aynı fonksiyonu elde edebilmek için bir C sabitinin olduğunu düşünmek zorundayız.Tamamen keyfi bir değer alan bu C sabitine integral sabiti denir.
Demek ki $\int f(x)dx$ integralinin hesaplanması türevi f(x) olan fonksiyonunun bulunmasıdır.O halde belirsiz integrallerde mutlaka bir integral sabitinin var olduğunu unutmamalıyız.

Örnek

$f(x) = -x^3 \quad , x \in (-\infty, \infty)$ fonksiyonunun ilkelinin genel şekli nedir?

Çözüm

f(x) = $-x^3$ ise $F'(x) = -\frac{x^4}{4} + C$

Çünkü $F'(x) = (-\frac{x^4}{4})' + C' = -x^3$

Örnek

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, x $\in (0, \infty)$ fonksiyonunun (1,1) noktasından geçen ilkelini bulunuz.

Çözüm

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ise $F(x) = -\frac{1}{x} + C$

Eğer x = 1 ise F(1) = 1

$f(1) = -\frac{1}{1} + C = 1$

-1 + C = 1

C = 2

Yani (1,1) noktasından geçen ilkeli $F(x) = -\frac{1}{x} + 2$

5-3 Belirsiz İntegralin Özellikleri

1) Belirsiz integralin türevi , integrali alınan fonksiyona eşittir.

Yani $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$ dir.

2) Belirsiz integralin diferansiyeli integral işareti altındaki ifadeye eşittir.

Yani $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$ dir.

3) Bir fonksiyonun diferansiyelinin belirsiz integrali , bu fonksiyona C sabitini eklemekle elde edilir.

Yani $\int df(x) = f(x) + c$ dir.

4) İki fonksiyonun toplamı veya farkının integrali , bu fonksiyonların integrallerinin toplamına veya farkına eşittir.

Yani $\int [f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$ dir.

5) Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının integrali , o sabitle fonksiyonun integralinin çarpımına eşittir.
Yani $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ dir.

Bazı İntegral Formülleri

1) $\int dx = x + C$

2) $\int kdx = kx + C \quad , \mathrm{k} = \mathrm{sabit}$

3) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ , \ n \neq -1$

4) $\int \dfrac{dx}{x^n} = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + C \quad , n \neq 1$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

6) $\int e^x dx = e^x + C$

7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \cos x dx = \sin x + C$

10) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

11) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

12) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

13) $\int \cos ec x dx = -\ln|\cos ec x + \cot x| + C$

14) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

15) $\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + C$

16) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

17) $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \mp a^2} \right| + C$

20) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

21) $\int f(x).f'(x)dx = \frac{[f(x)]^2}{2} + C$

22) $\int f^n(x).f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (\mathrm{n} \neq -1)$

23) $\int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$

24) $\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + C$

25) $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$

26) $\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$

ALIŞTIRMALAR

1) f(x) fonksiyonunun ilkelinin genel şekli nedir.?

a) f(x) = $2-x^4$
b) f(x) = 4x
c) f(x) = x^6
d) f(x) = x + cos x
e) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$
f) f(x) = -3
g) $f(x) = \frac{1}{x^3} + 4x$
h) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

2) f(x) fonksiyonunun M noktasından geçen ilkelini bulunuz.

a) f(x) = 2cosx , $M(-\frac{\pi}{2},1)$

b) f(x) = 1-x^2, M(-3,9)

c) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$, $M(\frac{2\pi}{3},-1)$

d) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M(\frac{1}{2},3)$

e) $f(x)=3x+\frac{1}{x^2}$, M(-1,4)

f) f(x) = 1-2x , M(3,2)

g) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3$, M(1,5)

h) f(x) = x^3+2 , M(2,15)

3) Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

1) $\int(2-x^3+\frac{1}{x^3})dx$

2) $\int(\frac{1}{x^2}-\sin x)dx$

3) $\int(x+\frac{2}{x^5}+\cos x)dx$

4) $\int(5x^2-1)dx$

5) $\int(2x-5)dx$

6) $\int(3\sin 2x)dx$

7) $\int[(-\frac{1}{3}\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})]dx$

8) $\int(\frac{2}{\cos^2(\frac{\pi}{3}-x)})dx$

9) $\int[-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}]dx$

10) $\int[(1-\cos 3x+2\sin(\frac{\pi}{3}-x)]dx$

11) $\int[\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{2-x}-3x^2]dx$

13) $\int[\frac{1}{3-x}+2\cos(\frac{\pi}{4}-x)]dx$

14) $\int 5e^x dx$

15) $\int 2.3^x dx$

16) $\int 4^x dx$

17) $\int[\frac{1}{2}e^x+1]dx$

18) $\int e^{3-x}dx$

19) $\int 2^{-19x}dx$

20) $\int(2.0,9^x-5,6^{-x})dx$

21) $\int(e^{3x}+2,3^{1+x})dx$

12) $\int [\frac{2}{\cos^2(3x+1)} - 3\sin(4-x) + 2x]dx$

5-3 İNTEGRAL ALMA METODLARI

Göstermiş olduğumuz integral alma kuralına benzemeyen fonksiyonların integralini farklı metotlarla bulmak mümkündür.

5-3-1 Değişken Değiştirme metodu

Örnek

$\int (2x-3)^5 dx = ?$

Çözüm

2x-3 = u dersek ve diferansiyelini alırsak

$2dx = du \Rightarrow \mathrm{dx} = \frac{1}{2}du$

$$\int (2x-3)^5 dx = \int u^5 . \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int u^5 du = \frac{1}{2}.\frac{u^6}{6} + C = \frac{u^6}{12} + C = \frac{(2x-3)^6}{12} + C$$

Örnek

$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$ =?

Çözüm

2-x = u

-dx = du ⇒ dx = -du

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}.(-du) = -\int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{u} + C = -2\sqrt{2-x} + C$$

Örnek

$\int \frac{3}{(4-15x)^4} dx$ =?

Çözüm

4 -15x = u

$-15xdx = du \Rightarrow \text{dx} = -\frac{1}{15}du$

$$\int \frac{3}{(4-15x)^4}dx = \int \frac{3}{u^4}.(-\frac{1}{15})du = -\frac{3}{15}\int u^{-4}du = -\frac{1}{5}.\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{15u^3} + C = \frac{1}{15.(4-15x)^3} + C$$

ALIŞTIRMALAR

1) $\int (1-3x)^9\,dx$

2) $\int \sqrt[3]{9+4x}dx$

3) $\int \quad x^3(1+x^4)^5\,dx$

4) $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$

5) $\int 5\sin^3 4x\cos 4x.dx$

6) $\int \sin^2 x.\cos xdx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx$

8) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3\,dx$

9) $\int \frac{7}{(2x+3)^3}dx$

10) $\int \quad \frac{2^4}{\sqrt{6x+7}}dx$

11) $\int 3x^2\sqrt{4+x^3}\,dx$

12) $\int \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}dx$

13) $\int x^2\cos 4x^3 dx$

14) $\int x(x+1)^{14}$

15) $\int \frac{x+2x^3}{(x^4+x^2)^3}dx$

16) $\int \quad \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$

17) $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx$

18) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

19) $\int e^{-3x} dx$

20) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

21) $\int e^{x^2-2x+1}(x-1)dx$

22) $\int e^{\sin x} \cos x dx$

23) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

24) $\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

25) $\int (1+\sin x)^5 \cos x dx$

26) $\int \frac{(\ln x)^{10}}{x} dx$

27) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

28) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx$

29) $\int \frac{5x}{5+2x^2} dx$

30) $\int \frac{e^{\sqrt{x+4}}}{\sqrt{x+4}} dx$

31) $\int \frac{\sin x dx}{3.\cos x+7}$

5-3-2 Kısmi İntegrasyon Metodu

$\int f(x).g(x).dx$ biçiminde iki fonksiyonun çarpımının integrali bazen güç olabilir. Böyle fonksiyonların daha kolayca integrallenebilmesi amacıyla kısmi integralleme aşağıdaki gibi yapılır.

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$
$$d(uv) = vdu + udv$$
$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

$uv = \int vdu + \int udv$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Örnek

$\int xe^x dx = ?$

Çözüm

$x = u \Rightarrow dx = du$
$e^x dx = dv \Rightarrow e^x = v$
$\int xe^x\, dx = \int udv \ = U \cdot V - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Örnek

$\int x^2 e^x dx = ?$

Çözüm

$x^2 = u \Rightarrow du = 2xdx$
$e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$
$\int x^2 e^x dx = \int udv = uv - \int vdu = x^2 e^x - \int e^x 2xdx$
$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\int udv = x^2 e^x - 2(uv - \int vdu)$
$= u \Rightarrow du = dx$
$e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$
$x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

Örnek

$\int e^{2x} \sin 3xdx$ =?

Çözüm

$\sin 3x = u \Rightarrow du = 3\cos 3xdx$

$e^{2x} dx = dv \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

$\int e^{2x} \sin 3xdx \ = \int udv = uv - \int vdu = \sin 3x.\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}.3\cos 3xdx$

$$= \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx = \text{B}$$

$$\cos 3x = u \Rightarrow du = -3\sin 3x dx$$

$$e^{2x}dx = dv \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\text{B} = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3}{2}.\int udv = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3}{2}.\left(uv - \int vdu\right)$$

$$\text{B} = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3e^{2x}\cos 3x}{4} - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx \quad yani$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3e^{2x}\cos 3x}{4} - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx$$

$$\int \mathrm{e}^{2x}\sin 3x\mathrm{dx} = \mathrm{A} \quad dersek$$

$$A = \frac{e^{2x}\sin 3x}{2} - \frac{3e^{2x}\cos 3x}{4} - \frac{9}{4}.A$$

$$\frac{13}{4}.A = \frac{e^{2x}\sin 3x}{13} - \frac{3e^{2x}\cos 3x}{4}$$

$$A = \frac{2e^{2x}\sin 3x}{13} - \frac{3e^{2x}\cos 3x}{13}$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{e^{2x}\left(2\sin x - 3\cos 3x\right)}{13} + C$$

ALIŞTIRMALAR

1) $\int x^3 \ln x dx$
2) $\int x\cos 3x dx$
3) $\int x^2 \sin x dx$
4) $\int x\ln x dx$
5) $\int x^5\sqrt{x^3+1}\ dx$
6) $\int x\sqrt{x+3}\ dx$
7) $\int x^2 \sin x^2 dx$
8) $\int (\ln x)^2 dx$
9) $\int \sqrt{x}\ \ln x dx$
10) $\int x^7 \cos x4 dx$
11) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx$

12) $\int e^{2x}\cos 2x dx$

13) $\int x\cos^2 x dx$

14) $\int \ln(1-x)dx$

15) $\int x\sin 3x dx$

16) $\int x^2 e^{3x} dx$

17) $\int \cos^2 x dx$

18) $\int x\sqrt{2x+1}\ dx$

19) $\int \arcsin x dx$

20) $\int \arctan x dx$

5-3-3 İndirgeme formülleri

Diferansiyelinde $\sin^n x$ ve $\cos^n x$ gibi ifadeler bulunan integrallerde kısmi integrasyon metodu art arda uygulanırsa aşağıdaki indirgeme formülleri elde edilir.

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x dx + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

Örnek

$$\int \sin^6 x dx = ?$$

Çözüm

$$\int \sin^6 \mathrm{x} \mathrm{dx} = -\frac{1}{6}\sin^5 \mathrm{x}\cos \mathrm{x} + \frac{5}{6}\int \sin^4 \mathrm{x} \mathrm{dx}$$

$$= -\frac{\sin^5 \mathrm{x}\cos \mathrm{x}}{6} + \frac{5}{6}.\left[-\frac{\mathrm{x}}{4}\sin^5 \mathrm{x}\cos \mathrm{x} + \frac{3}{4}\int \sin^2 \mathrm{x} \mathrm{dx}\right]$$

$$= -\frac{\sin^5 x\cos x}{6} - \frac{5\sin^5 x\cos x}{24} + \frac{5}{8}\int \sin^2 x dx$$

$$= -\frac{\sin^5 \mathrm{x}\cos \mathrm{x}}{6} - \frac{5\sin^5 \mathrm{x}\cos \mathrm{x}}{24} + \frac{5}{8}.\left(-\frac{1}{2}\sin \mathrm{x}\cos \mathrm{x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{dx}\right)$$

$$= -\frac{\sin^5 x\cos x}{6} - \frac{5\sin^5 x\cos x}{24} - \frac{5\sin x\cos x}{16} + \frac{5x}{16} + C$$

Örnek

$$\int \cos^5 x dx = ?$$

Çözüm

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{5}\cos^4 x\sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x dx$$
$$= \frac{\cos^4 x\sin x}{5} + \frac{4}{5}.\left[\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{3}\int \cos x dx\right]$$
$$= \frac{\cos^4 x\sin x}{5} + \frac{4\cos^2 x\sin x}{15} + \frac{8\sin x}{15} + C$$

ALIŞTIRMALAR

1) $\int 3\cos^4 x dx$

2) $\int \frac{\sin^7 x}{4} dx$

3) $\int \left(2\sin^3 x + 5\cos^6 x\right)dx$

5-3-4 Basit Kesirlere Ayırma Metodu

Bu metot rasyonel fonksiyonların integrasyonunda kullanılan bir metoddur.

a) $\int \frac{k}{ax+b} dx \quad hali$

Bu tür kesirlerde paydanın türevi pay kısmında varsa logaritmalı formülden yararlanılabilir.

$$\int \frac{k}{ax+b} dx = \frac{k}{a}\int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{k}{a} = \frac{k}{a}\cdot \ln|ax+b| + C$$

Örnek

$$\int \frac{7}{2x-5}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2}{2x-5}dx = \frac{7}{2}\ln|2x-5| + C$$

Örnek

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+7}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+7\right| + c$$

b) $\int \frac{k}{(ax+b)^n}dx \quad hali \quad u = ax+b \quad dönüşümüyle \ \ çözülür.$

$$u = ax+b \quad ise \quad du = adx \quad ve \quad dx = \frac{1}{a}du$$

$$\int \frac{k}{(ax+b)^n}dx = \int \frac{k}{u^n}.\frac{1}{a}du = \frac{k}{a}\int \frac{1}{u^n}du$$

$$= \frac{k}{a}.\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{k}{a(-n+1)u^{n-1}} + C$$

Örnek

$$\int \frac{3}{(4x-5)^6}dx = \frac{3}{4(-6+1).(4x-5)^5} + C = -\frac{3}{20(4x-5)^5} + C$$

Örnek

$$\int \frac{4}{(2-x)^3}dx = \frac{4}{-1.(-3+1).(2-x)^2} + C = \frac{2}{(2-x)^2} + C$$

c) $f(x) = \frac{p(x)}{Q(x)} \quad hali$

Rasyonel ifadesinde payın derecesi paydanın derecesinden büyük ve ya eşit ise pay paydaya bölünür.

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ şeklinde yazılır ve sonra ayrı ayrı integralleri alınır.

Örnek

$$\int \frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}dx = ?$$

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+2x+3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\quad 3x^2+3 & 3 \\ \cline{1-1} 2x & \end{array}$$

$$\int \frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}dx = \int \frac{3(x^2+1)+2x}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \left(3+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int 3dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx = 3x + \ln\left|x^2+1\right| + C$$

Örnek

$$\int \frac{x^4+2x^2+x}{x^3+1}dx = ?$$

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^2+x & x^3+1 \\ \cline{2-2} -\quad x^4+x & x \\ \cline{1-1} 2x^2 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4+2x^2+x}{x^3+1}dx = \int \frac{x\left(x^3+1\right)+2x^2}{x^3+1}dx = \int \left(x+\frac{2x^2}{x^3+1}\right)dx$$

$$= \int xdx + \int \frac{2x^2}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}.\ln\left|x^3+1\right| + C$$

Örnek

$$\int \frac{x}{x-2}dx = ?$$

Çözüm

$$\int \frac{x}{x-2}dx = \int \frac{x-2+2}{x-2}dx = \int \left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{2}{x-2}dx = x + 2.\ln|x-2| + C$$

d) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ *hali*

Eğer ax^2+bx+c polinomu çarpımlarına ayrılıyorsa ifade basit kesirlere ayrılarak integre edilir. Basit kesirlerine ayrılmıyorsa arctan$x$ formulüne benzetilerek çözülür. Şimdi birkaç rasyonel fonksiyonu basit kesirlere ayıralım.

Örnek

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2)$$
$$1 = Ax + 2A + Bx - 2B$$
$$1 = (A+B)x + (2A-2B)$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2A-2B=0 \\ 2A-2B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -4B=1$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{4} \quad ve \quad A = \frac{1}{4}$$

$$yani \quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

Örnek

$$-\frac{2x+1}{x^3+27} = \frac{2x+1}{(x+3)(x^2-3x+9)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2-3x+9}$$

$$2x+1 = A(x^2-3x+9) + (Bx+C)(x+3)$$
$$2x+1 = Ax^2 - 3Ax + 9A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C$$
$$2x+1 = (A+B)x^2 + (-3A+3B+C)x + (9A+3C)$$

$$\begin{aligned} &A+B=0 \\ &-3A+3B+C=2 \\ &9A+3C=1 \end{aligned} \quad \Bigg] \quad \begin{aligned} &B=-A \\ &-3A+3.(-A)+\frac{1-9A}{3}=2 \\ &C=\frac{1-9A}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad -3A-3A+\frac{1-9A}{3}=2$$

$$-18A+1-9A=6$$

$$-27A=5$$

$$A=-\frac{5}{27}$$

$$B=\frac{5}{27}$$

$$C=\frac{1-9(-\frac{5}{27})}{3}=\frac{1+\frac{5}{3}}{3}=\frac{3+5}{9}=\frac{8}{9}$$

$$yani \quad \frac{2x+1}{x^3+27}=\frac{-\frac{5}{27}}{x+3}=\frac{\frac{5}{27}x+\frac{8}{9}}{x^2-3x+9}$$

$$=-\frac{5}{27(x+3)}+\frac{5x+24}{27(x^2-3x+9)}$$

Örnek

$$\frac{x^3+3}{x(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$x^3+3=A(x+1)^2(x^2+1)+Bx(x+1)(x^2+1)+Cx(x^2+1)+(Dx+E)x(x+1)^2$$

$$x^3+3=A(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)+B(x^4+x^3+x^2+x)+Cx^3+Cx+Dx^4+2Dx^3+Dx^2+$$
$$+Ex^3+2Ex^2+Ex$$
$$x^3+3=Ax^4+2Ax^3+2Ax^2+2Ax+A+Bx^4+Bx^3+Bx^2+Bx+Cx^3+Cx+Dx^4+2Dx^3+Dx^2+$$
$$+Ex^3+2Ex^2+Ex$$
$$x^3+3=(A+B+D)x^4+(2A+B+C+2D+E)x^3+(2A+B+D+2E)x^2+$$
$$+(2A+B+C+E)x+B$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+D=0 \\ 2A+B+C+2D+E=1 \\ 2A+B+D+2E=0 \\ 2A+B+C+E=0 \\ A=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B+D=-3 \\ B+C+2D+E=-5 \\ B+D+2E=-6 \\ B+C+E=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2D=-5+6 \\ 2D=1 \\ D=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow B=-3-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}\Rightarrow 2E=-6+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=-3\Rightarrow E=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow C=-2A-B-E=-6+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=-1$$

yani $A=3$

$B=-\frac{7}{2}$

$C=-1$

$D=\frac{1}{2}$

$E=-\frac{3}{2}$ *ve*

$$\frac{x^3+3}{x(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{3}{x}+\frac{-\frac{7}{2}}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}{x^2+1}$$

$$=\frac{3}{x}-\frac{7}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x-3}{2(x^2+1)}$$

Rasyonel ifadeler yukarıda görüldüğü gibi basit kesirlere ayrılır ve integral parçalanarak kolaylaştırılır.

Örnek

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx = ?$$

Çözüm

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x+1 = A(x+1)+B(x-1)$$
$$3x+1 = Ax + A + Bx - B$$
$$3x+1 = (A+B)x+(A-B)$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=3 \\ A-B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow \begin{matrix} A=2 \\ B=1 \end{matrix}$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right)dx = \int\frac{2}{x-1}dx + \int\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \ln|x-1| + \ln|x+1| + C = \ln\left|(x-1)^2(x+1)\right| + C$$

Örnek

$$\int \frac{3x-1}{(x^2-2x-3)}dx = ?$$

Çözüm

$$\frac{3x-1}{x^2-2x-3} = \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$3x-1 = A(x-3)+B(x+1)$$
$$3x-1 = Ax - 3A + Bx + B$$
$$3x-1 = (A+B)x+(-3A+B)$$

$$\begin{matrix} A+B=3 \\ -3A+B=-1 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -A-B=-3 \\ -3A+B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -4\mathrm{A} = -4 \Rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=2 \end{matrix}$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx = \int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}\right)dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{2}{x-3}dx$$

$$= \ln|x+1| + 2\ln|x-3| + C = \ln\left|(x+1)(x-3)^2\right| + C$$

Örnek

$$\int \frac{x+1}{x^3-1}dx = ?$$

Çözüm

$$\frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x+1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$
$$x+1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$
$$x+1 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-B=1 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A+C=1 \\ A-C=1 \end{array}\right] \Rightarrow 3A=2 \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{2}{3} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=-\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{x+1}{x^3-1}dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)dx =$$
$$= \int \frac{\frac{2}{3}}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right| + C$$

e) *eğer* $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ *halinde* ax^2+bx+c çarpanlarına *ayrıyrılmı sa* $\Delta > 0$

$$\int \frac{dt}{A^2+t^2} = \frac{1}{A}\cdot \arctan\frac{t}{A} + C \quad \textit{veya}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$ *formülünden yararlanarak çözüm yapılır.*

Örnek

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{9(1+(\frac{x}{3})^2)} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}\arctan\frac{x}{3}+C = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$$

Örnek

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = ?$$

Çözüm

x^2+4x+5 *çarpanlarına ayrılmıyor.*

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \arctan(x+2)+C$$

Alıştırmalar

1) $\int \frac{x-1}{x}dx$

2) $\int \frac{x-x}{x^2}dx$

3) $\int \frac{x}{x^2+4}dx$

4) $\int \frac{x^2-x-2}{x+2}dx$

5) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$

6) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$

7) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

8) $\int \frac{1}{9x^2+6x+5}dx$

9) $\int \frac{1}{x^2+4x-5}dx$

10) $\int \frac{5-3x}{x^2+4x-5}dx$

11) $\int \frac{x+1}{(x^2+4x-5)^2}dx$

12) $\int \frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

13) $\int \frac{x^3-2x}{x^2+2x+2}dx$

14) $\int \frac{3x+2}{x^3+x^2-2}dx$

15) $\int \frac{1}{x^3+8}dx$

16) $\int \frac{x^4+2x^2}{x^3-1}dx$

17) $\int \frac{5x+31}{3x^2-4x+11}dx$

18) $\int \frac{8x^2-4x+7}{(x^2+1)(4x+1)}dx$

19) $\int \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^3}dx$

20) $\int \frac{4x^3-x+1}{x^3+1}dx$

21) $\int \frac{x^4+2x+2}{x^5+x^4}dx$

22) $\int \frac{2x^3+3x^2+4}{(x+1)^4}dx$

23) $\int \frac{3x+2}{4x^2+4x+3}dx$

24) $\int \frac{1}{3+2x-x^2}dx$

25) $\int \frac{2x-1}{4x^2+4x-15}dx$

26) $\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}dx$

27) $\int \frac{2x+3}{4x^2+12x+13}dx$

28) $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}dx$

29) $\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2+x}dx$

30) $\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx$

31) $\int \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}dx$

32) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^4+2x^2+1}dx$

33) $\int \frac{2x^2-5x-1}{x^3-2x^2-x+2}dx$

5-4 BELİRLİ İNTEGRAL

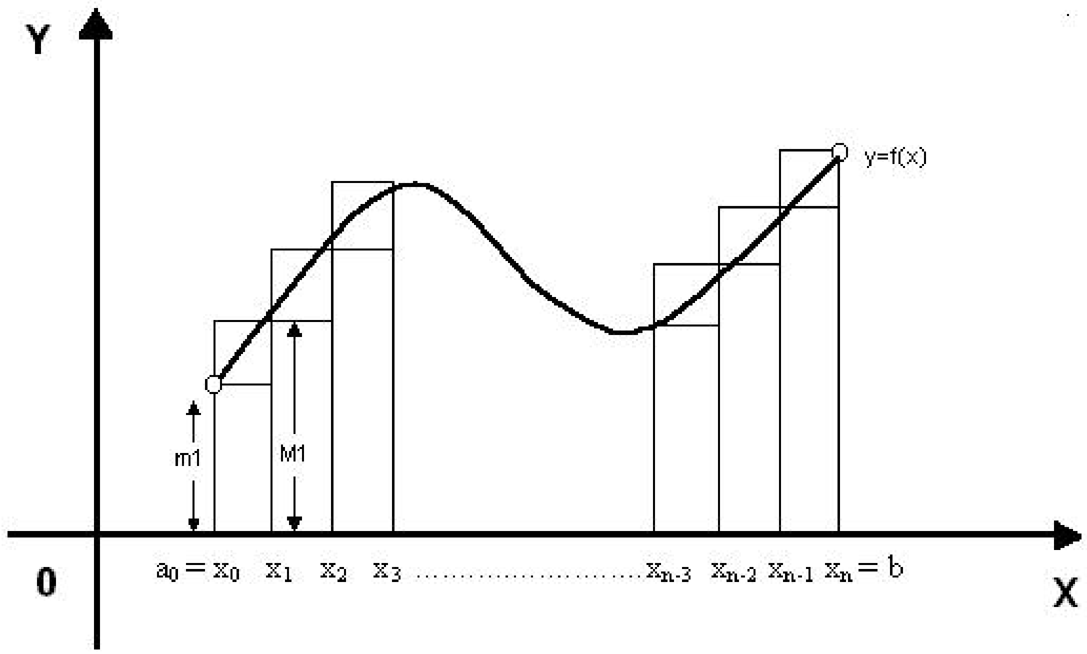
5-4-1 RİEMANN ANLAMINDA BELİRLİ İNTEGRAL

[a,b] aralığında sürekli olan bir y = f(x) fonksiyonunu göz önüne alalım.Bu fonksiyonun bu aralıktaki mutlak minimum ve maksimum değerleri sırasıyla m ve M olsun. [a,b] aralığını n alt aralığa ayıralım.

$$a = x_0, x_1, x_3, \ldots\ldots\ x_n = b$$

Bu alt aralıkların uzunlukları $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ eşittir.

f(x) fonksiyonunun her alt aralığındaki en küçük ve en büyük değerleri sırasıyla m_k ve M_K olsun.



ŞEKİL-1

Bu halde;

$$S(n)=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+.........m_n\Delta x_n=\sum_{K=1}^{n}m_k\Delta x_k \quad \text{(alt toplam)}$$

$$S(n)=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+.........M_n\Delta x_n=\sum_{K=1}^{n}M_k\Delta x_K \quad \text{(üst toplam)}$$

$s(n)\leq S(n)$

Çünkü $m_k \leq M_K$

Eğer f(x)=sabit ise s(n)= S(n)
Alt toplam alttan sınırlı bir dizi ,üst toplam da üstten sınırlı bir dizidir.
Gerçekten, y =f (x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki mutlak minimum m ve mutlak maksimum M olduğundan ;
$m< m_1$, $m<m_2$,......, m_n ve $M>M_1$, $M>M_2$,..., $M>M_n$ ve
$s(n) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ...+m_n\Delta x_u > M (\Delta x_1+\Delta x_2+......+\Delta x_u) = m(b-a)$

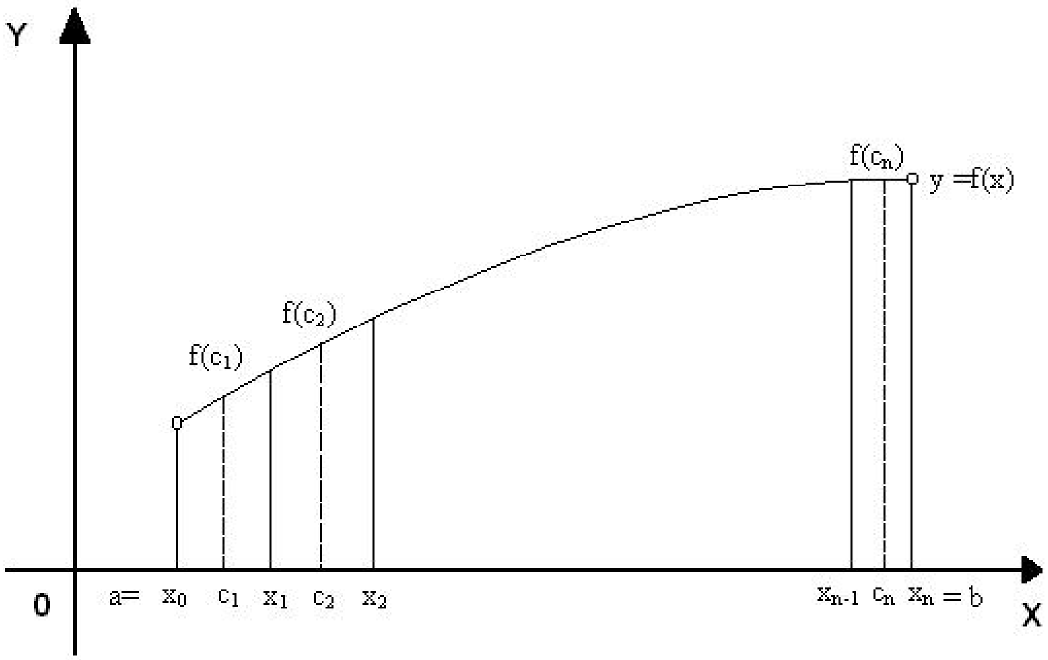
Yani $s(n) \geq m(b -a)$

$S(u) = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + ... + M_n\,\Delta x_n< M(\Delta x_1+\Delta x_2+...+\Delta X_n=M(b-a)$

Yani $S(n) \leq M(b-a)$
Yukarıda elde ettiğimiz eşitsizlikleri dikkate alırsak;

$m(b-a) \leq s(n) \leq S(n) \leq M(b-a)$

[a,b] aralığını $[x_0,x_1],[x_1,x_2],.......,[x_{n-1},x_n]$ aralıklarına bölelim.Alt aralıkların her birinden bir nokta seçelim $c_1,c_2,......c_n$ (şekil-2). Bu noktalarda y = f(x) fonksiyonunun aldığı değerler sırasıyla $f(c_1),f(c_2),.....f(c_n)$ olsun.



Şekil-2

Buna göre her dikdörtgenin alanı;

$S_k = f(c_k)\cdot \Delta x_k$

Alanların toplamı ise;

$$S(n) = f(c_1)\Delta x_1\ \Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_u)\Delta x_u = \sum_{K=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Her bir $m_k \le f(c_k) \le M_k$ ve $\Delta x_k > 0$ için

$m_k \Delta x_k \le f(c_K)\Delta x_k \le M_k \Delta x_k$ ve

$$\sum_{k=1}^{u} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{u} f(c_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{u} M_k \Delta x_k$$

Yani $s(n) \le S_n \le S(n)$

Tanım
y = f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.[a,b] aralığını n tane alt aralığa bölelim ve her aralığın uzunluğu Δx olsun.

Eğer $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{u} f(c_k)\Delta x_k = L$ ise bu limite y = f(x) fonksiyonunun a ve b sınırları arasındaki belirli integrali denir ve $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{u} f(c_K)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde gösterilir.

a sayısına integralin alt sınırı, b sayısına integralin üst sınırı , [a,b] aralığına integrasyon aralığı ,x değişkenine de integrasyon değişkeni denir.

Tanım
y = f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.Bu takdirde f fonksiyonunun eğrisi, Ox ekseni, x=a ve x=b doğruları arasında kalan alan A ise;

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

5-4-2 BELİRLİ İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

1- Eğer f(x) fonksiyonu x=a noktasında tanımlı ise $\int_a^a f(x)dx = 0$

2-Eğer f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ise ;

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3- Eğer f(x) fonksiyonu [a,c] ve [c,b] aralığında integrallenebiliyorsa;_

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4- f ve g [a,b] aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ve k bir sabit olsun.Bu takdirde;

a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

b) $\int_a^b [f(x)\mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$

5-4-3 İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ

Teorem

y = f(x) fonksiyonu [a,b] arlığında sürekli bir fonksiyon ,F(x) fonksiyonu da her bir $x \in [a,b]$ için f(x)=F'(x) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun.Bu takdirde ;

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Örnek

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{32+1}{5} = \frac{33}{5} = 6{,}6$$

Örnek

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

Örnek

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

Örnek

$$\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1)^{-1}}{-1}.\frac{1}{2}\Big|_1^2 = -(\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_1^2 = -(\frac{1}{2(2.1+1)}) - \frac{1}{2.(2.1+1)})$$

$$= -(\frac{1}{10} - \frac{1}{6}) = -(\frac{-2}{30}) = \frac{1}{15}$$

Örnek

$$\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx = 3.2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 6\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 6(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 6.(1-0) = 6$$

Örnek

$$\int_1^4 (x + \frac{\sqrt{x}}{x})dx = \int_1^4 (x + x^{\frac{-1}{2}})dx = (\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})\Big|_1^4 = (\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x})\Big|_1^4 =$$

$$(\frac{4^2}{2}+2\sqrt{4})-(\frac{1^2}{2}+2\sqrt{1})=(8+4)-(\frac{1}{2}+2)=8+4-\frac{1}{2}-2=10-\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$$

Örnek

$$\int_0^1 0.5^x\,dx=\frac{0.5^x}{\ln 0.5}\Big|_0^1=\frac{0.5^1}{\ln 0.5}-\frac{0.5^0}{\ln 0.5}=\frac{0.5-1}{\ln 0.5}=\frac{-0.5}{\ln 0.5}=\frac{1}{\ln 4}$$

Örnek

$$\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^0}{2}=\frac{e\ \ -1}{2}$$

Örnek

$$\int_{-2}^1 2^x\mathrm{dx}=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-2}^1=\frac{2}{\ln 2}-\frac{2^{-2}}{\ln 2}=\frac{2-\frac{1}{4}}{\ln 2}=\frac{7}{4\ln 2}$$

Örnek

$$\int_1^7\frac{2dx}{x}=2\ln|x|\Big|_1^7=2(\ln 7-\ln 1)=2\ln 7$$

Örnek

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{dx}}{3-2\mathrm{x}}=-\frac{1}{2}\ln|3-2\mathrm{x}|\Big|_{-1}^1=-\frac{1}{2}.(\ln|3-2|-\ln|3+2|$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln 5=\frac{\ln 5}{2}=\ln\sqrt{5}$$

Örnek

$$\int_1^e\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1$$

ALIŞTIRMALAR

1) $\int_{-1}^{2}dx$

2) $\int_{0}^{3}5dx$

17) $\int_{-1}^{1}(2x^2-5x-7)dx$

18) $\int_{2}^{7}\frac{dx}{x^2}$

3) $\int_{-2}^{5} x\,dx$

19) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{3x^6}$

4) $\int_{0}^{1} x^2 dx$

20) $\int_{1}^{2} \frac{2x^3+3x-2}{x^5} dx$

5) $\int_{1}^{4} (3-2x)dx$

21) $\int_{0}^{\pi} \sin 5x\,dx$

6) $\int_{0}^{1} (x^2+1)dx$

22) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

7) $\int_{-1}^{0} (x^2+2x)dx$

23) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3} dx$

8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} dx$

24) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$

9) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^{2x} x}$

25) $\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}$

10) $\int_{0}^{\pi} (\sin x - 3\cos x - x)dx$

26) $\int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

11) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x+1}$

27) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4})^2 dx$

12) $\int_{0}^{\ln 2} e^{2x} dx$

28) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx$

13) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x}\,dx$

29) $\int_{0}^{2} (1+2x)^3 dx$

14) $\int_{3}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

30) $\int_{0}^{2} x e^{x^2} dx$

15) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{3x+1}$

31) $\int_{1}^{e} \frac{x^2-2}{x} dx$

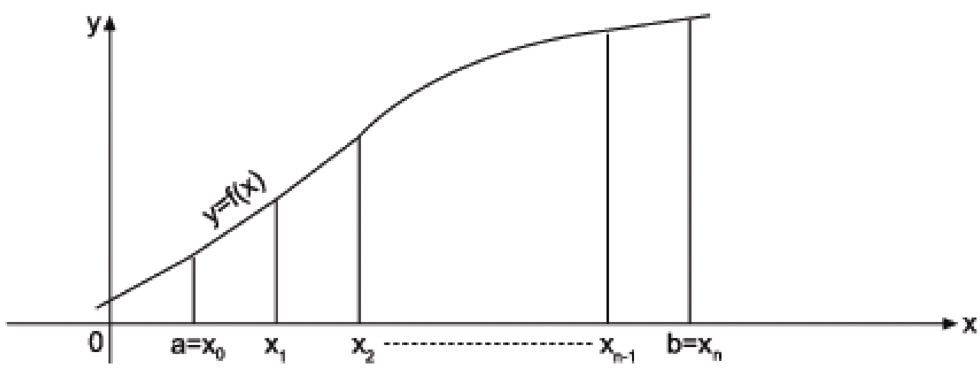
16) $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} 3^x \, dx$

32) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

5-5 Nümerik İntegral

Bazı fonksiyonlar var ki, onların integralini bulmakta sıkıntı çekebiliriz. Yani, hiçbir kuralı kullanmak olmuyor. Böyle hallerde belirli integralin yaklaşık değerini bulmak işimize yarar. Belirli integralin yaklaşık değerini bulmak için biz iki yöntem araştıracağız.

5-5-1 Yamuk Kuralı



f (x) fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ve pozitif değerler alan bir fonksiyon olsun.

y =f (x) eğrisi, x=a, x=b ve ox ekseni ile sınırlı olan bölgenin alanı= $\int_{a}^{b} f(x)dx$ olsun.

[a,b] aralığını n tane eşit parçaya bölelim. Her bir aralığın genişliği $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olacak.

1 yamuğun alanı

$$A_1 = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$
$$A_2 = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$A_n = \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$
$$= \frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+....+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Böylece,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(x_0)+2f(x_1)+....+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Örnek

$$A = \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx \qquad \Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4},\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$$

a) n=4 için yamuk kuralına göre A=?

Çözüm

$$A = \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1-0}{2\cdot 4}\cdot\left(\sqrt{2\cdot 0+1} + 2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}+1} + 2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}+1} + 2\sqrt{2\cdot\frac{3}{4}+1} + \sqrt{2\cdot 1+1}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\cdot\sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{3}\right) = \frac{1}{8}\cdot(1+2,5+2,8+3,2+1,7) = 1,4$$

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \int_0^1 (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3^3}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{3}-1}{3} = 1,4$$

b) $n = 6$ $\qquad \Delta x = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$

Çözüm

$$A=\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx=\frac{1-0}{2\cdot 6}\cdot\left(\begin{matrix}\sqrt{2\cdot 0+1}+2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{1}{6}+1}+2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{2}{6}+1}+2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{3}{6}+1}+2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{4}{6}+1}+\\ 2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{5}{6}+1}+\sqrt{2\cdot\frac{6}{6}+1}\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(1+\frac{4}{\sqrt{3}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}+2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}+2\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}+\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot(1+2{,}4+2{,}6+2{,}8+3{,}1+3{,}3+1{,}7)=\frac{1}{12}\cdot 16{,}9=1{,}4$$

Örnek

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx \qquad n=4 \qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{4}$$

Çözüm

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx=\frac{1-0}{2\cdot 4}\cdot\left(\sqrt{0^2+1}+2\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+1}+2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+2\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}+\sqrt{1^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(1+2\cdot\sqrt{\frac{17}{16}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}+2\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}+\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{17}}{2}+\sqrt{5}+\frac{5}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{1}{8}\cdot(1+2{,}1+2{,}2+2{,}5+1{,}4)=\frac{1}{8}\cdot 9{,}2=2{,}3=1{,}2$$

Örnek

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, \qquad n=4 \qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}$$

Çözüm

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+0^3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1^3}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+2^3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1+1{,}9+1{,}4+0{,}9+\frac{1}{3}\right)=1{,}4$$

Örnek

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}, \qquad n=6 \qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{6}=\frac{1}{6}$$

Çözüm

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+1}=\frac{1-0}{2\cdot 6}\cdot\left(\frac{1}{0^2+1}+2\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2+1}+2\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{6}\right)^2+1}+2\cdot\frac{1}{\left(\frac{3}{6}\right)^2+1}+2\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{6}\right)^2+1}+2\cdot\frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^2+1}+\frac{1}{1^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(1+\frac{72}{37}+\frac{9}{5}+\frac{8}{5}+\frac{18}{13}+\frac{72}{61}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}\cdot(1+1{,}9+1{,}8+1{,}6+1{,}4+1{,}2+0{,}5)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 9{,}4=0{,}783\approx 0{,}8$$

Örnek

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx, \qquad n=4 \qquad \Delta x=\frac{5-1}{4}=1$$

Çözüm

$$\int_{14}^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\frac{5-1}{2\cdot 4}\left(\frac{\sqrt{1-1}}{1}+2\cdot\frac{\sqrt{2-1}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3-1}}{3}+2\cdot\frac{\sqrt{4-1}}{4}+\frac{\sqrt{5-1}}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(0+1+\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+0{,}94+0{,}86+0{,}4)=\frac{1}{2}\cdot 3{,}2=1{,}6$$

5-5-2 Simpson Kuralı

Belirli integralin yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılan yöntemlerden birisi de Simpson kuralıdır. Simpson kuralına göre

y = f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\cdot\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+....+f(x_n)\right)$$

Örnek

$$A=\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$$

a) $n=4$ $\qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$

Çözüm

$$A=\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx=\frac{1-0}{3\cdot 4}\cdot\left(\sqrt{2\cdot 0+1}+4\cdot\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}+1}+2\sqrt{2\cdot\frac{2}{4}+1}+4\cdot\sqrt{2\cdot\frac{3}{4}+1}+\sqrt{2\cdot 1+1}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{12}\cdot(1+4{,}9+2{,}8+6{,}3+1{,}7)=1{,}4$$

b) $n=6$ $\qquad \Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{6}=\frac{1}{6}$

Çözüm

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx=\frac{1-0}{3\cdot 6}\cdot\left(\sqrt{2\cdot 0+1}+4\cdot\sqrt{2\cdot\frac{1}{6}+1}+2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{2}{6}+1}+4\cdot\sqrt{2\cdot\frac{3}{6}+1}+2\cdot\sqrt{2\cdot\frac{4}{6}+1}+4\cdot\sqrt{2\cdot\frac{5}{6}+1}+\sqrt{2\cdot 1+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\left(1+\frac{8}{\sqrt{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}+4\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{7}{3}}+8\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{18}\cdot(1+4{,}6+2{,}6+5{,}6+3{,}1+6{,}5+1{,}7)$$

$$=\frac{1}{18}\cdot 25{,}1=1{,}4$$

Örnek

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx \ , \quad n=4 \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

Çözüm

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = \frac{5-1}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-1}}{1} + 4\cdot\frac{\sqrt{2-1}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3-1}}{3} + 4\cdot\frac{\sqrt{4-1}}{4} + \frac{\sqrt{5-1}}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(0 + 2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}\cdot(2 + 0{,}94 + 1{,}73 + 0{,}4) = \frac{1}{3}\cdot 5 = 1{,}67$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki belirli integrallerin yaklaşık değerlerini yamuk kuralı ve Simpson kuralı ile bulunuz.

1) $\int_0^4 \frac{3x}{x+4}dx$, $n=4$ için

2) $\int_0^2 \sqrt{1+x^5}\,dx$, $n=6$ için

3) $\int_0^4 x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$, $n=6$ için

4) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx$, $n=4$ için

5) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$, $n=4$ için

1) $\int \sin 2x \, dx = ?$

A) $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$ **B)** $-\cos 2x + c$ **C)** $2\cos 2x + c$ **D)** $\frac{1}{2}\cos x + c$ **E)** $\cos x + c$

Cevap A

2) $\int \sin(3x+4)\, dx = ?$

A) $-\cos(3x+4)+c$ **B)** $\cos(4x+3)\cdot\frac{1}{3}+c$ **C)** $-\cos(3x+4)\cdot\frac{1}{3}+c$

D) $-3\cos(3x+4)+c$ **E)** $\cos(3x+4)+c$

Cevap C

3) $\int \sin(ax+b)\, dx = ?$

A) $\cos(ax+b)\cdot\frac{1}{a}+c$ B) $-\cos(ax+b)\cdot\frac{1}{b}+c$ C) $-a\cos(ax+b)+c$

D) $\cos(ax+b)+c$ E) $-\cos(ax+b)\cdot\frac{1}{a}+c$

Cevap E

4) $\int\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) dx = ?$

A) $-\sin 2x + c$ B) $-\frac{1}{2}\sin 2x + c$ C) $\frac{1}{2}\sin x + c$ D) $2\sin\frac{x}{2} + c$

E) $-\frac{1}{2}\sin x + c$

Cevap B

5) $\int \cos 3x \, dx = ?$

A) $-\frac{1}{3}\sin x + c$ B) $-3\sin 3x + c$ C) $3\sin\frac{x}{3} + c$ D) $\frac{1}{3}\sin 3x + c$

E) $-3\sin x + c$

Cevap D

6) $\int \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = ?$

A) $\sin x + c$ B) $-\sin x + c$ C) $-\cos 2x + c$ D) $\cos^2 x + c$
E) $\sin 2x + c$

Cevap A

7) $\int \sin^2 x \, dx = ?$

A) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ B) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin x + c$ C) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$
D) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ E) $\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\sin 2x + c$

Cevap C

8) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = ?$

A) $x + \cos x + c$ B) $x - \frac{1}{2}\sin x + c$ C) $x + \sin x + c$ D) $x - \cos x + c$
E) $x - \sin x + c$

Cevap E

9) $\int \tan^2 x \, dx = ?$

A) $\tan x + x + c$ B) $\tan x - x + c$ C) $-\tan x + x + c$ D) $-\tan x - x + c$
E) $\frac{1}{2}\tan x - x + c$

Cevap B

10) $\int \left(\cot an^2 x + 3 \right) dx = ?$

A) $\cot anx - x + c$ B) $-\cot anx - 2x + c$ C) $\cot anx + 2x + c$
D) $-\cot anx + 2x + c$ E) $-\cot anx + \frac{x}{2} + c$

Cevap D

11) $\int \cos^2 2x\,dx - \int \sin^2 2x\,dx = ?$

A) $\frac{1}{4}\sin 4x + c$ B) $\frac{1}{2}\sin 4x + c$ C) $-\frac{1}{4}\sin 4x + c$ D) $-2\sin 4x + c$
E) $-\frac{1}{2}\sin 4x + c$

Cevap A

12) $\int \tan^4 x\,dx = ?$

A) $\tan^3 x + x + c$ B) $\tan x - \cot anx + c$ C) $\tan x - x + c$ D) $\tan^3 x - x^3 + c$
E) $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

Cevap E

13) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = ?$

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{\pi}{2} + 1$ E) $\frac{\pi - 2}{2}$

Cevap D

14) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = ?$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\ln 2$ D) $\ln 3$ E) $\frac{1}{2}\ln 3$

Cevap E

15) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = ?$

A) $-\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

Cevap A

16) $\int \cos^3 x\,dx = ?$

A) $3\sin x - \sin^3 x + c$ B) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$ C) $\sin^3 x - \frac{1}{3}\sin x + c$

D) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + c$ E) $\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

Cevap B

17) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = ?$

A) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + c$ B) $\sin^3 x + \cos^4 x + c$ C) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

D) $3\sin^3 x - 5\sin^5 x + c$ E) $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

Cevap C

18) $\int \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}\,dx = ?$

A) $\frac{1}{\sin x} - \cot anx + c$ B) $-\frac{1}{\sin x} + \cot anx + c$ C) $\sin x + \cot anx + c$

D) $\tan x + \cot anx + c$ E) $x + \cos x - \cot anx + c$

CevapB

19) $\int \frac{1}{1-\cos x}\, dx = ?$

A) $-\cot anx - \frac{1}{\sin x} + c$ B) $\cot anx - \sin x + c$ C) $-\tan x - \frac{1}{\sin x} + c$

D) $\cot anx - \frac{1}{\cos x} + c$ E) $\frac{1}{\sin x} + c$

Cevap A

20) $\int (\sin x - \cos a)\, dx = ?$

A) $\cos x + \sin a + c$ B) $-\cos x + x\cos a + c$ C) $x\sin a - \sin x + c$

D) $-\cos x - x\cos a + c$ E) $-\cos x - \sin a + c$

Cevap D

21. $\int \left(1 - x + \frac{1}{x}\right) dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x - x^2 + \sqrt{x} + c$ B) $x + x^2 + x^3 + c$

C) $x - x^3 + \frac{1}{x^2} + c$ D) $2x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + c$

E) $x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + c$

CEVAP : E

22. $\int (2x+3)\ \mathrm{dx}$ integralinin sonucu nedir?

A) $x^2 + 3 + c$ B) $2x^2 + 3x + c$

C) $x^2 + 3x + c$ D) $\frac{2}{3}x^3 + 3x + c$

E) $x + 3x^2 + c$

CEVAP : C

23. $\int (3-x)^2 \, dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(3-x)^3 + c$ B) $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + c$

C) $x^3 + x^2 - x + c$ D) $\frac{1}{3-x} + c$

E) $3x^3 + 2x^2 - x + c$

CEVAP : B

24. Aşağıdakilerden hangisi f(x)= 1 – 2x fonksiyonunun bir integrali değildir?

A) $f(x) = x - x^2$ B) $f(x) = 1 + x - x^2$

C) $f(x) = 3 + x - x^2$ D) $f(x) = \sqrt{2} + x - x^2$

E) $f(x) = 2x - x^2$

CEVAP : E

25. Türevi $f(x) = 3x^2 + 5$ olan g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $x^3 + 5x$ B) $x^3 + 5x - \sqrt{2}$

C) $x^3 + 5x + 4$ D) $x^3 + 5x + 5000$

E) $x^3 + 5x^2 + x$

CEVAP : E

26. $\int (x-2)(x+2) \, dx$ integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x^2 - 2)(x^2 + 2) + c$ B) $x^2 - 4 + c$

C) $x^3 - 4x + c$ D) $\frac{1}{3}x^3 - 4x + c$

E) $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x) + c$

CEVAP : D

27. $\int (3x+5)^{40} \, dx$ integralini hesaplamak için en uygun değişken değişikliği aşağıdakilerden hangisiyle yapılır?

A) $u = 3x + 5$ B) $u = 3x$ C) $u = x + 5$

D) $u = 3x - 5$ E) $u = x - 5$

CEVAP : A

28. $\int \frac{x^2}{4x^3+5}\,\mathrm{dx}$ integralini kolay hesaplamak için en uygun değişken değişikliği aşağıdakilerden hangisidir?

A) $u = x^3$ B) $u = 4x^3 + 1$

C) $u = x^3 + 5$ D) $u = x^3 + 20$

E) $u = 4x^3 + 5$

CEVAP : E

29. $G(x) = \int \left(e^x + 2x\right)\,\mathrm{dx}$ olmak üzere, G(0) =2 başlangıç koşulunu sağlayan c integral sabiti kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

CEVAP : B

30. $F(1) = 2$ ise $F(x) = \int \left(3x^2 - 2x + 1\right)\,\mathrm{dx}$ integrali sonucundaki c değeri kaçtır?

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

CEVAP : D

31. $\int (2x+3)^5\,dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{12}(2x+3)^6 + c$ B) $\frac{1}{6}(2x+3)^6 + c$

C) $5(2x+3)^4 + c$ D) $10(2\mathrm{x}+3)^4 + c$

E) $(2x+3)^6 + c$

CEVAP : A

32. $\int \frac{3\ \mathrm{dx}}{3\mathrm{x}+2}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\ln|3x+2| + c$ B) $\ln\sqrt{3x+2} + c$

C) $(3x+2)^2 + c$ D) $\frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

E) $3x^2 + 2x + c$

CEVAP : A

33. A ve B uygun sayılar olmak üzere , $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

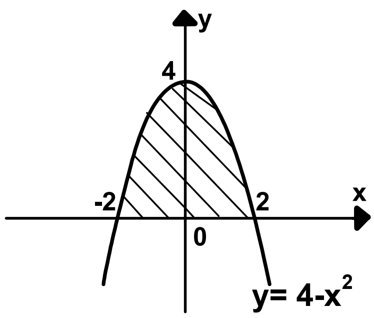
A) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+1$ B) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-2}+1$

C) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-4}$ D) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+1$

E) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+1$

CEVAP : Ds

34.

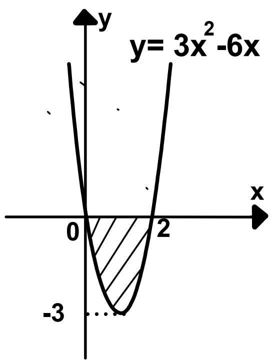


Şekilde, denklemi $y=4-x^2$ olan parabolün grafiği ve x- ekseniyle sınırlı taralı bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 3   B) 16   C) 32   D) $\dfrac{16}{3}$ E) $\dfrac{32}{3}$

CEVAP : E

35.



$y=3x^2-6x$ fonksiyonu ile x – ekseninin sınırladığı ve şekilde taralı olarak gösterilen alan kaç birim karedir?

A) 6   B) 5   C) 4   D) 3   E) 2

CEVAP : C