BÖLÜM 5

MATRİS ve DETERMİNANTLAR

5.1. MATRİSLER

Tanım : $m, n, i, j \ \in \text{¢}^{+}$ olmak üzere tüm a_{ij} reel sayılardan oluşan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

tablosuna **m x n tipinde bir A matrisi** denir ve kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir.

Burada a_{ij}, A matrisinin i-inci satır j-inci sütunundaki elemanıdır.

Tablodaki yatay sıralara matrisin satırları, düşey sıralara da matrisin sütunları (kolonları) adı verilir. A matrisi m tane satırdan ve n tane sütundan oluşmuş, $m \times n$ tipindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2X3}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{4X2}$

birer matristir.

5.1.1. MATRİS ÇEŞİTLERİ

1) Kare ve Dikdörtgen Matris

$m \times n$ boyutlu A matrisinde $m \neq n$ ise **dikdörtgen matris** , $m = n$ ise **kare matris** olarak adlandırılır.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$$ kare matris,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2X3} \quad \text{ve} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{4X2}$$ ise dikdörtgen matrislerdir.

2) Birim (Etkisiz) Matris

a) Toplama işlemine göre

Bütün terimleri sıfır olan matrise **0 matrisi** denir ve 0 ile gösterilir.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x3}$$

0 matrisi toplama işlemine göre birim matristir.

Tanım: Bir karesel matrisde tüm a_{ii} elemanlarının oluşturduğu köşegene **esas köşegen** denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -7 & -4 & -1 \\ 9 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinde esas köşegen üzerindeki elemanları $1, -4, 3$ tür.

b) Çarpma işlemine göre

Esas köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları 0 olan karesel matrislere **çarpma işlemine göre birim matris** denir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

3) Köşegen Matris

Esas köşegen üzerindeki elemanları 0 farklı, diğer tüm elemanları 0 olan kare matrislere **köşegen matris** denir.

I_n (birim matris) aynı zamanda köşegen matristir.

4) Üçgensel Matris

a) Üst üçgensel matris

Bir kare matrisin elemanları $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise bu matrise **üst üçgensel matris** denir.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \cdots & a_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b) Alt üçgensel matris

Elemanları $i<j$ için $a_{ij} = 0$ olan matrise **alt üçgensel matris** denir.

$$L=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & a_{44} & \dots & 0 \\ a_{d1} & . & . & . & & a_{dd} \end{bmatrix}$$

5) Simetrik Matris

Bir kare matrisin elemanları esas köşegene göre simetrik ise bu tür matrislere **simetrik matris** denir. Yani $a_{ij}=a_{ji}$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

6) Devrik Matris

Boyutu $m\times n$ olan bir A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen ve boyutu $n\times m$ olan matrise **A matrisinin devriği (transpozesi)** denir ve A^T ile gösterilir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ise $A^T=?$

Çözüm: $A^T=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

5.2. MATRİSLERDE İŞLEMLER

5.2.1.MATRİSLERİN EŞİTLİĞİ

Tanım: Aynı tipteki iki matrisin karşılıklı tüm elemanları birbirine eşit ise **bu iki matris eşittir** denir.

$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ ve $a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow A=B$ dir.

Örnek: $\begin{bmatrix} 3x-1 & -3 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise $x+y=?$

Çözüm: $3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$

$y+1=3 \Rightarrow y=2$ olup

$x+y=1+2=3$ bulunur.

5.2.2. MATRİSLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

Tanım: Aynı tipteki iki matrisin karşılıklı elemanları toplanarak bulunan yeni matrise **toplam matrisi** denir.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=C$ dir.

İki matrisin çıkarma işlemi de aynı yöntemle yapılır.

Yani, $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$ şeklindedir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}$ ise $A-B=?$ ve $A+B=?$

Çözüm:

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 0-3 & 2-0\\ -1-0 & -4-5 & 8-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 2\\ -1 & -9 & 4\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2 & 0+3 & 2+0\\ -1+0 & -4+5 & 8+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 12\end{bmatrix}$$

5.2.3. MATRİSİN REEL SAYI İLE ÇARPIMI

Bir matrisin tüm elemanları $k\in\mathbb{R}$ ile çarpılırsa matris de k ile çarpılmış olur.

Yani, $k\cdot A=\left[k\cdot a_{ij}\right]_{m\times n}$ dir.

Özellikler

$A, B\ ve\ C$ aynı boyutlarda matrisler ve $k, k_1, k_2\in\mathbb{R}$ olsun .

$$1)\ k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$$
$$2)\ (k_1+k_2)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot A$$
$$3)\ (k_1\cdot k_2)\cdot A=k_1\cdot(k_2\cdot A)=k_2\cdot(k_1\cdot A)$$
$$4)\ 1\cdot A=A\ \ ve\ \ -1\cdot A=-A$$
$$5)\ k\cdot 0=0\ \ ve\ \ 0\cdot A=0$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ise $-5\cdot A$ matrisini bulunuz.

Çözüm: $-5\cdot A=-5\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 5\\ -15 & -20\end{bmatrix}$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & -6\\ 8 & -4\end{bmatrix}$ ise $\dfrac{-A}{2}+3\cdot I_2=?$

Çözüm: $\dfrac{-1}{2}\cdot A+3\cdot I_2=-\dfrac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}2 & -6\\ 8 & -4\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -4 & 5\end{bmatrix}$

5.2.4.İKİ MATRİSİN ÇARPIMI

İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısının ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir.Çarpma işleminde birinci matrisin tüm satır elemanları ikinci matrisin tüm sütun elemanları ile karşılıklı olarak çarpılıp toplanır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}_{2\times 3}$ ise $A\cdot B=?$ ve $B\cdot A=?$

Çözüm: $A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 2+2 & 4+4\\ 3+3 & 6+1 & 12+2\\ 4+6 & 8+2 & 16+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4 & 8\\ 6 & 7 & 14\\ 10 & 10 & 20\end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6+16 & 2+2+8\\ 3+3+8 & 6+1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 12\\ 14 & 11\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}_{3\times 2}$ ise $A\cdot B=?$ ve $B\cdot A=?$

Çözüm: $A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+10+16 & 15-5-12\\ 2+2-8 & 10-1+6\\ -3-2+4 & -15+1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & -2\\ -4 & 15\\ -1 & -17\end{bmatrix}_{3\times 2}$

$B\cdot A$ işlemi yapılamaz, çünkü B matrisinin sütun sayısı A matrisinin satır sayısına eşit değildir.

5.2.5. KARE MATRİSLERİN KUVVETLERİ

A karesel bir matris olmak üzere, her kare matris kendisi ile çarpılabilir.

$$A^0 = I_n$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A \cdot A^2$$
$$A^n = A \cdot A^{n-1}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi ve $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor. $f(A)$ matrisini bulunuz.

Çözüm: $f(A) = A^3 - 2A^2 - I_2$ olup sırası ile A^2 ve A^3 matrislerini bulup $f(A)$ da yerine yazalım.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 27 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 27 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5.3. DETERMİNANT

Tanım: Determinant karesel bir matrisi reel sayıya dönüştüren bir fonksiyondur.

$n \times n$ boyutlu bir A kare matrisinin determinantı $\det(A) = |A|$ ile gösterilir.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ dır.}$$

5.3.1. DETERMİNANTIN ÖZELLİKLERİ

1) Bir determinantın bir satırdaki veya bir sütundaki elemanları 0 ise, o determinantın değeri 0 dır.

2) Bir determinantta aynı numaralı satırlar ve sütunlar yer değiştirirse, determinantın değeri değişmez.

3) Bir determinantın iki satırı veya sütunu yer değiştirirse, determinantın işareti değişir.

4) Bir determinantın bir sayı ile çarpılması demek, her hangi bir satırın veya sütunun o sayı ile çarpılması demektir.

5) Bir determinantın iki satır veya sütunu aynı elemanlardan oluşuyorsa veya orantılı ise, o determinantın değeri 0 dır.

6) Bir determinantta bir satırın veya sütunun elemanlarını bir sayı ile çarpıp bir başka satırın ya da sütunun karşılıklı elemanlarına eklemek determinantın değerini değiştirmez.

5.3.2. İKİNCİ MERTEBEDEN DETERMİNANT ACILIMI

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

yedek köşegen esas köşegen

Örnek : $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 - 2\cdot 5 = -14$

Örnek : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 4 = 0$

Örnek : $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ ise $x = ?$

Çözüm : $(x-2)x-3=0$ olup $x^2-2x-3=0$ ise $(x-3)(x+1)=0$

buradan $x=3$ ve $x=-1$ bulunur.

5.3.3. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN DETERMİNANT AÇILIMI

a) SARRUS kuralı

Bu kurala göre ilk iki satır alt tarafa veya ilk iki sütun sağ tarafa yazılıp esas köşegen çarpımlarından yedek köşegen çarpımları çıkarılır.

$$|A| = \begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \atop \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise $|A| = \begin{array}{|ccc|} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \atop \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$

$|A| = 1\cdot2\cdot2+0\cdot1\cdot4+3\cdot3\cdot1-4\cdot2\cdot3-1\cdot1\cdot1-2\cdot3\cdot0=-12$ bulunur.

b)LAPRACE kuralı

Bu kuralla herhangi bir satır veya sütuna göre açılım yapılır. Ancak sıfır elemanının yoğun olduğu satır veya sütunlar kolaylık sağlar. Bu açılım her boyuttaki determinant için geçerlidir.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını 1. satıra göre açalım.

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ise $|A| = ?$

Çözüm: Bu matrisin determinantını üçüncü sütuna göre açmakta kolaylık vardır. Çünkü

bu sütundaki sıfır elemanları yoğunluktadır.

$$|A| = 0 + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 0 = -2 \cdot (6 - 12) = -2 \cdot (-6) = 12 \text{ bulunur.}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ise $|A| = ?$

Çözüm: Bu matrisin determinantını üçüncü satıra göre açmakta kolaylık vardır.

$$|A| = 0 + (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -3 \cdot \left[0 + 0 + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -3 \cdot 2 \cdot (5 - 6) = -6 \cdot (-1) = 6 \text{ bulunur.}$$

5.4. BİR DETERMİNANTIN MİNÖRLERİ VE KOFAKTÖRLERİ

Tanım: $i, j \in \text{¢}^{+} \; ve \; A = \left[a_{ij} \right]_{nxn}$ kare matrisinin i nci satır ve j nci sütunu

silindikten sonra elde edilen yeni matrisin determinantına a_{ij} elemanının **alt**

determinantı veya **minörü** denir ve $|M_{ij}|$ ile gösterilir.

$|A_{ij}| = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$ ifadesine de a_{ij} elemanın **kofaktörü** denir:

Örnek : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin 1.satır elemanlarının minör ve kofaktörünü bulunuz.

Çözüm : a_{11} in minörü $|M_{11}|=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-12=-11$ ve

kofaktörü ise $|A_{11}|=(-1)^{1+1}\cdot|M_{11}|=|M_{11}|=-11.$

a_{12} in minörü $|M_{12}|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3-8=-5$ ve

kofaktörü ise $|A_{12}|=(-1)^{1+2}\cdot|M_{12}|=-|M_{12}|=5$

a_{13} ün minörü $|M_{13}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9-2=7$ ve

kofaktörü ise $|A_{13}|=(-1)^{3+1}\cdot|M_{13}|=|M_{13}|=7$.

5.5. EK MATRİS

Tanım: A karesel matris olmak üzere a_{ij} elemanının yerine o elemanın kofaktörleri konularak bulunan matrisin transpozuna A nın **ek matrisi** denir ve $Ek(A)$ ile gösterilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ ise $Ek(A)=?$

Çözüm:

$$|A_{11}|=(-1)^{1+1}\cdot 4=4$$
$$|A_{12}|=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3$$
$$|A_{21}|=(-1)^{2+1}\cdot 1=-1$$
$$|A_{22}|=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$$

$$Ek(A)=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \text{ dir.}$$

2×2 boyuttaki bir matrisin ek matrisini bulmak için, esas köşegen üzerindeki elemanlar yer, yedek köşegen üzerindeki elemanlarda işaret değiştirir.

Örnek : $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}$ ise $Ek(A)=?$

Çözüm:

$$|A_{11}|=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2+2=4$$

$$|A_{12}|=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(3-2)=-1$$

$$|A_{13}|=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

$$|A_{21}|=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)=1$$

$$|A_{22}|=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$|A_{23}|=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-2+2)=0$$

$$|A_{31}|=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$|A_{32}|=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot 1=-1$$

$$|A_{33}|=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2+3=5$$

$$Ek(A)=\begin{bmatrix}4 & -1 & -10\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -10 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ bulunur.

5.6. BİR MATRİSİN TERSİ (İNVERSİ)

Tanım: A $n\times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $A\cdot B=B\cdot A=I_{n\times n}$ eşitliğini sağlayan B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin **tersi(İnversi)** denir ve $B=A^{-1}$ ile gösterilir. Buna göre $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I_{n\times n}$ dir.

Tanım: A $n\times n$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin tersi A^{-1} şeklinde gösterilir ve $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Ek(A)$ formülünden bulunur.

Not: Bir matrisin tersinin olabilmesi için matrisin karesel ve determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

Örnek : $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ ise $A^{-1}=?$

Çözüm:

1.yol : $A\cdot A^{-1}=\mathrm{I}_{2\times 2}$ olduğundan, $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ olsun

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a+2c & b+2d\\ 5a+3c & 5b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}a+2c&=1\\ b+2d&=0\\ 5a+3c&=0\\ 5b+3d&=1\end{aligned}$$ denklem sistemini çözersek,

$a=-\frac{3}{7},\ b=\frac{2}{7},c=\frac{5}{7},d=-\frac{1}{7}$ bulunur o halde

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

2.yol : $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Ek(A)$ olduğundan, önce $|A|$ bulalım.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=3-10=-7 \text{ ve } Ek(A)=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\cdot Ek(A)=-\frac{1}{7}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ise $A^{-1}=?$

Çözüm: $|A|=0$ olduğundan A matrisinin tersi yoktur.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ise $A^{-1}=?$

Çözüm:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(21-3+16)-(14-4+18)=34-28=6$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{matrix}$$

Şimdide tüm kofaktörleri bulalım.

$$|A_{11}| = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 21+4 = 25$$

$$|A_{12}| = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -(9-8) = -1$$

$$|A_{13}| = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -3-14 = -17$$

$$|A_{21}| = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} = -(6+1) = -7$$

$$|A_{22}| = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 3-2 = 1$$

$$|A_{23}| = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -(-1-4) = 5$$

$$|A_{31}| = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & 4\end{vmatrix} = 8-7 = 1$$

$$|A_{32}| = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$|A_{33}| = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix} = 7-6 = 1$$

$$Ek(A) = \begin{bmatrix}25 & -1 & -17\\ -7 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}25 & -7 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -17 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}25 & -7 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -17 & 5 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{25}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{17}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$ bulunur.

5.7. BİR MATRİSİN RANKI

Tanım: Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\neq 0$ matrisinin karesel alt matrisleri arasında, determinantı sıfırdan farklı olanların mertebesi en büyük olana A matrisinin **rankı** denir ve rank(A) ile gösterilir.

Örnek : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ise $\text{rank}(A)=?$

Çözüm:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}=0+(-1)^{2+3}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}+0=2\cdot(1-10)=2\cdot(-9)=-18\neq 0$$

olduğundan $\text{rank}(A)=3$ dir.

Örnek : $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 5 & 0\\ 4 & 6 & 2\end{bmatrix}$ ise $\text{rank}(A)=?$

Çözüm:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 5 & 0\\ 4 & 6 & 2\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 4 & 6\end{vmatrix}+0+(-1)^{3+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=-6-20+2\cdot(10+3)=-26+26=0$$

olduğundan $\text{rank}(A)<3$ olduğundan

$A_1=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ alalım.

$$|A_1|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=10+3=13\neq 0 .$$

Yani $\text{rank}(A)=2$ dir.

5.8. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Tanım: $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + ...+ a_{1n}\,x_n = b_1$ denklemine **1. dereceden n bilinmeyenli lineer denklem** denir. Bu tip lineer denklemlerden oluşan sistemine **lineer denklem sistemi(takımı)** denir.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sisteminin katsayılar matrisi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \; . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

olup

sabit vektörü $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}_{mx1}$ ve bilinmeyenler vektörü $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ dir.

O halde lineer denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A \cdot X = B$ şeklinde yazılabilir.

Örneğin, $\begin{cases} 2x & -3y & +z & =1 \\ x & +2z & =-1 \\ x & -2y & +3z & =0 \end{cases}$

denklem sistemini $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklinde yazabiliriz.

5.8.1. LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN CRAMER METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Katsayılar matrisi kare matris olan bir lineer denklem sisteminin çözümü bu kurala göre yapılır. Örneğin $n=3$ için uygulanırsa ;

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere lineer denklem sistemini $A \cdot X = B$ şeklinde ifade edebiliriz.

Burada

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$ dir.

Eğer,

1) $\Delta = |A| \neq 0$ ise lineer denklem sisteminin bir tek çözümü olup

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ dir.

2) $\Delta = |\mathrm{A}| = 0$ ise ;

a) $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı ise sistemin çözümü yoktur.

b) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ sistemin sonsuz çözümü vardır.

Örnek : $\begin{cases} x - 6y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 3x + 4y - z = -2 \end{cases}$ denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm: Verilen lineer denklem sistemini

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$ yazarız.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -21$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1 \quad ,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3 \ ,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-21}{3} = -7 \text{ olup}$$

$Ç.K. = \{(1,-3,-7)\}$ bulunur.

Örnek : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + 5y = -9 \end{cases}$ denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 27 = 13$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = -18 - 8 = -26$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{13}{13} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{26}{13} = -2$$

$Ç.K. = \{(1,-2)\}$ bulunur.

Örnek : $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$ denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$ olup, sisteminin sonsuz çözümü vardır.

$x - 2y = -3 \Rightarrow x = 2y - 3 \qquad y = t$ dersek $x = 2t - 3$

$Ç.K = \{(2t-3, t)\}$ bulunur.

Örnek : $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$ denklem sistemini Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 18 + 18 = 36 \neq 0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 9 = 18 \neq 0$

sistemin çözüm kümesi boş kümedir.

BÖLÜM ALIŞTIRMALARI

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ise $A + A^T = ?$

2) $A = \begin{bmatrix} 3x + y & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2x - 3y \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A = B$ ise $x + y = ?$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{bmatrix}$ matrisine göre $|A| = 6$ ise $a = ?$

4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = 2x^2 - 3x$ ise $f(A) = ?$

5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ise $(A - B) \cdot (A + B) = ?$

6) $A=\begin{bmatrix} 2 & -a \\ a+4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi için $|A|=4$ ise $a=?$

7) $\begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 0 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$ denklemini çözünüz.

8) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$ sistemini çözünüz.

9) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ -2x_1+x_2-x_3=-9 \\ -x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$ sistemini çözünüz.

10) $\begin{cases} y-z=3 \\ x-2z=-2 \\ 2x-y+z=-3 \end{cases}$ sistemini çözünüz.

11) $\begin{cases} 2x-4y=0 \\ 3x-6y=0 \\ 4x-8y=0 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

12) $\begin{cases} 2x-4y+5z=0 \\ 3x-6y+4z=0 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

13) $\begin{cases} -x+2y+z=-1 \\ 2x-3y-2z=1 \\ -2x-y+3z=6 \end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

14) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ determinantının 3.satırının minör ve kofaktörlerini bulunuz.

15) $A=\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ise $|A|=?$

16) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin tersi $\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ ise $x+y+z+t=?$

17) $\begin{cases}x+y=1\\ 2x-y=2\end{cases}$ lineer denklem sistemini çözünüz.

18) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}$ ise $x\cdot y=?$

19) $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$ sisteminin çözümü olan (x,y) bulunuz.

20) $\begin{bmatrix}a & 1\\ 2 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & x\\ y & 4\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $a+b+x+y$ toplamı kaçtır.

21) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A+B$ matrisini bulunuz.

22) $M=\begin{bmatrix}0 & 8\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ise $3M$ matrisi nedir?

23) $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine göre $(A+2B)$

toplamı nedir?

24) $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ ise $C-D$ fark matrisi nedir?

25) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A\cdot B$ matrisini bulunuz.

26) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ ise $A\cdot B$ çarpım matrisi nedir ?

27) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A\cdot B$ matrisi nedir ?

28) $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine göre, $A\cdot B=$?

29) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A\cdot B+C$=?

30) $\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin tersi nedir?

31) $A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 10 & 20\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı kaçtır?

32) $\begin{vmatrix}k & 4\\ 5 & 8\end{vmatrix}=12$ olduğuna göre k kaçtır?

33) $\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

34) $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$ ise $Ek(A)=?$

35) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$ matrisinin rankı nedir?

36) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$ ise $A^{-1}=?$

BÖLÜM TESTİ

1) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ lineer denklem sistemi, aşağıdaki matris gösterimlerinden hangisi ile ifade edilir?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} [xy] = [21]$

D) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

E) $[xy] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ifadesi aşağıdaki denklem sistemlerinden hangisinin matrislerle yazılmış biçimidir?

A) $\begin{cases} 4x+2y=5 \\ 3x+y=6 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 4x-5y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ x+3y=6 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$

E) $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ sisteminin çözümü olan (x,y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,1)$ B) $(0,1)$ C) $(1,2)$ D) $(-1,1)$ E) $(-1,-2)$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ sisteminin çözümü olan (x,y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0,3)$ B) $(0,1)$ C) $(1,1)$ D) $(1,2)$ E) $(2,2)$

5) $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $x+y+z$ toplamı kaçtır?

A) 13 B) 12 C) 10 D) 9 E) 7

6) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $A+B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[20]$ B) $[5]$ C) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 8 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A+B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $A-2B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

9) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $A \cdot B$ çarpım matrisi nedir?

A) $\begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 20 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

10) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ olduğuna göre $A\cdot B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}10 & 0\\ 8 & 4\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}13 & 4\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$

11) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A\cdot B$ çarpımı nedir?

A) $\begin{bmatrix}4 & 11 & 5\\ 1 & 4 & 0\\ 10 & 25 & 15\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}4 & 1 & 15\\ 11 & 4 & 25\\ 5 & 0 & 10\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 12\\ 7 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}4 & 5\\ 10 & 15\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}4 & 11 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

12) $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 6 & 12\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & 12\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 0 & 12\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}3\\ 18\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}3 & 18\end{bmatrix}$

13) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ olduğuna göre $A\cdot B$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}3 & -4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 6 & 0\end{bmatrix}$

14) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$ matrisleri verildiğine göre, $C=A\cdot B$ eşitliğini sağlayan C matrisi nedir?

A) $\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 2\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 2\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix}-5 & 2\\3 & -2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}-5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$

15) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$ matrisleri için aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) $A-B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\2 & 4\end{bmatrix}$ B) $A+B=\begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{bmatrix}$ C) $3A=\begin{bmatrix}3 & 0\\9 & 2\end{bmatrix}$

D) $3A-B=\begin{bmatrix}0 & 0\\8 & 4\end{bmatrix}$ E) $4B=\begin{bmatrix}12 & 4\\4 & 8\end{bmatrix}$

16) $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$ ise A matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-2]$ B) $[10]$ C) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

17) Aşağıdaki matrislerden hangisinin ters matrisi yoktur?

A) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}3 & 5\\7 & 9\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 0\end{bmatrix}$

18) Aşağıdaki matrislerden hangisinin tersi vardır?

A) $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}0 & 5\\0 & 2\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}10 & 11\\1 & 2\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 12\end{bmatrix}$

19) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C)1 D) 10 E) 21

21) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ olduğuna göre, k kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

22) $\begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin (x, y) çözüm kümesi nedir?

A) $\{(3,4)\}$ B) $\{(-3,4)\}$ C) $\{(-3,-4)\}$ D) $\{(2,1)\}$ E) $\{(1,2)\}$

23) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümü olan (x, y) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,-1)$ B) $(-1,3)$ C) $(2,0)$ D) $(0,4)$ E) $(1,2)$

24) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümü (x, y, z) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,0,0)$ B) $(0,0,1)$ C) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ D) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ E) $\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$

25) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y+2z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümü (x,y,z) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2,1,2)$ B) $(1,1,3)$ C) $(-2,4,3)$ D) $(1,3,1)$ E) $(4,2,-1)$

26) $\begin{cases} x+2y+2z=5 \\ x-y+z=1 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümü olan (x,y,z) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,-1,-2)$ B) $(1,2,3)$ C) $(2,0,3)$ D) $(2,5,1)$ E) $(1,1,1)$

27) $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ z-x=4 \\ y+z=9 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümü olan (x,y,z) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3,2,7)$ B) $(-3,2,-7)$ C) $(4,2,5)$ D) $(-4,2,-5)$ E) $(-1,3,5)$

28) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin çözümü (x,y,z) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1,2,0)$ B) $(1,1,2)$ C) $(1,1,1)$ D) $(2,1,0)$ E) $(1,2,3)$